Felder $\underline{E}$, $\underline{B}$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$$

$$\Rightarrow E^\alpha = -\partial_\alpha \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c A^\alpha = -\partial_\alpha \phi^0 - \partial_0 \phi^\alpha = \partial^\alpha \phi^0 - \partial^0 \phi^\alpha$$

$(\alpha = 1,2,3)$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow cB^1 = \partial_2 cA^3 - \partial_3 cA^2 = \partial_2 \phi^3 - \partial_3 \phi^2 = \partial^3\phi^2 - \partial^2\phi^3$$

zyklische Vertauschung: $cB^2 = \partial^1\phi^3 - \partial^3\phi^1$

$cB^3 = \partial^2\phi^1 - \partial^1\phi^2$

Zusammenfassung durch antisymm. Feldtensor

$$\boxed{F^{ik} := \partial^i\phi^k - \partial^k\phi^i} \quad , \quad F^{ik} = -F^{ki} \quad (i = 0,1,2,4)$$

Wegen der Antisymm. hat F^{ik} nur 6 unabhängige Komponenten:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentz-Trafo der Felder

Als Tensor 2. Stufe transformiert sich F^{ik} wie

$$F'^{ik} = U^i{}_l U^k{}_m F^{lm} \quad , \quad U^i{}_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Im einzelnen:

$$E'^1 = F'^{10} = U^1{}_l U^0{}_m F^{lm} = -\beta\gamma U^0{}_m F^{0m} + \gamma U^0{}_m F^{1m}$$

$$= (\beta\gamma)^2 F^{01} + (\gamma)^2 F^{10} = \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} F^{10} = E^1$$

$$E'^2 = F'^{20} = u^2{}_l u^0{}_m F^{lm} = u^0{}_m F^{2m} = \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{21}$$
$$= \gamma(E^2 - vB^3)$$

$$E'^3 = F'^{30} = u^0{}_m F^{3m} = \gamma F^{30} - \beta\gamma F^{31}$$
$$= \gamma(E^3 + vB^2)$$

$$B'^1 = \frac{1}{c} F'^{32} = \frac{1}{c} u^3{}_l u^2{}_m F^{lm} = \frac{1}{c} F^{32} = B^1$$

$$B'^2 = \frac{1}{c} F'^{13} = \frac{1}{c} u^1{}_l u^3{}_m F^{lm} = \frac{1}{c} u^1{}_l F^{l3} = -\frac{\beta\gamma}{c} F^{03} + \frac{\gamma}{c} F^{13}$$
$$= \gamma\left(B^2 + \frac{v}{c^2} E^3\right)$$

$$B'^3 = \gamma\left(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2\right)$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{array}{ll} E'^1 = E^1 & B'^1 = B^1 \\ E'^2 = \gamma(E^2 - vB^3) & B'^2 = \gamma\left(B^2 + \frac{v}{c}E^3\right) \\ E'^3 = \gamma(E^3 + vB^2) & B'^3 = \gamma\left(B^3 - \frac{v}{c^2}E^2\right) \end{array}}$$

Elektr. u. magnet. Felder werden beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen ineinander transformiert.

<u>Umeichung</u>

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi$$

$$\Rightarrow \tilde{F}^{ik} = \partial^i \tilde{\phi}^k - \partial^k \tilde{\phi}^i = \partial^i(\phi^k + \partial^k\varphi) - \partial^k(\phi^i + \partial^i\varphi)$$
$$= \underbrace{\partial^i\phi^k - \partial^k\phi^i}_{F^{ik}} + \underbrace{\partial^i\partial^k\varphi - \partial^k\partial^i\varphi}_{0} = F^{ik}$$

also F^{ik} <u>eichinvariant</u>!

Homogene Maxwellgln.

(1) $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$

mit $\partial_1 = -\partial^1, \ldots, \; F^{32} = -F^{23}, \ldots$ folgt:

$$\boxed{\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0} \qquad \text{zykl. } (1\,2\,3)$$

$1\,2\,3 \qquad 2\,3\,1 \qquad 3\,1\,2$

(2) $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$

1. Komp.: $\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \frac{\partial}{\partial t} B^1 = 0$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} + \partial_0 F^{32} = 0$$

mit $\partial_0 = \partial^0, \; \partial_2 = -\partial^2, \; \partial_3 = -\partial^3, \; F^{32} = -F^{23}, \; F^{20} = -F^{02}$:

$$\boxed{\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0} \qquad \text{zykl. } (0\,2\,3)$$

zykl. Permutation $1 \to 2 \to 3 \to 1$ und $F^{ik} = -F^{ki}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} = 0 \\ &\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\text{zykl. } (0\,1\,3) \\ &\text{zykl. } (0\,1\,2)\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassung der homog. Maxwellgln.:

$$\boxed{\epsilon_{iklm}\, \partial^k F^{lm} = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\epsilon^{iklm}\, \partial_k F_{lm} = 0}\,, \quad \text{„4-Rotation"}$$

mit
$$\epsilon^{iklm} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (iklm) = \text{gerade Permut. von } (0123) \\ -1 & \text{wenn } (iklm) = \text{ungerade Perm. v. } (0123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4-dim. Levi-Civita-Tensor)

3-dim. Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{ikl}\partial^k a^l = (\underline{\nabla} \times \underline{a})_i$

<u>Bemerkung</u>: (i) ϵ^{iklm} ist vollständig antisymm.

(ii) ϵ^{iklm} transformiert sich unter Lorentz-Trafo:

$$\epsilon'^{iklm} = U^i{}_n U^k{}_p U^l{}_q U^m{}_r \, \epsilon^{npqr}$$

$$= \begin{vmatrix} U^i{}_0 & U^i{}_1 & U^i{}_2 & U^i{}_3 \\ U^k{}_0 & U^k{}_1 & U^k{}_2 & U^k{}_3 \\ U^l{}_0 & U^l{}_1 & U^l{}_2 & U^l{}_3 \\ U^m{}_0 & U^m{}_1 & U^m{}_2 & U^m{}_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} \, \epsilon^{iklm}$$

Damit $\epsilon'^{iklm} = \epsilon^{iklm}$, muss vereinbart werden, dass

$$\epsilon'^{iklm} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} U^i{}_n U^k{}_p U^l{}_q U^m{}_r \, \epsilon^{npqr}$$

Damit ist ϵ^{iklm} ein <u>Pseudotensor</u>

(Verallgemeinerung des 3-dim. Falles ϵ^{ikl} mit

$$\underset{\text{Pseudovektor}}{(\underline{\nabla} \times \underline{A})_\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma$$
)