

Felder $\underline{E}, \underline{B}$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$$

$$\Rightarrow E^\alpha = -\partial_\alpha\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}cA^\alpha = -\partial_\alpha\phi^0 - \partial_0\phi^\alpha = \partial^\alpha\phi^0 - \partial^0\phi^\alpha \quad (\alpha=1,2,3)$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\rightarrow cB^1 = \partial_2 cA^3 - \partial_3 cA^2 = \partial_2\phi^3 - \partial_3\phi^2 = \partial^3\phi^2 - \partial^2\phi^3$$

zyklische Vertauschung:

$$cB^2 = \partial^1\phi^3 - \partial^3\phi^1$$
$$cB^3 = \partial^2\phi^1 - \partial^1\phi^2$$

Zusammenfassung durch antisymmetr. Feldtensor

$$F^{ik} := \partial^i\phi^k - \partial^k\phi^i$$

$$F^{ik} = -F^{ki} \quad (i=0,1,2,3)$$

Wegen der Antisymmetrie hat F^{ik} nur 6 unabhängige Komponenten:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lorentz-Transf. der Felder

Als Tensor 2. Stufe transformiert sich F^{ik} wie

$$F'^{ik} = \Lambda^i_\ell \Lambda^k_m F^{\ell m}, \quad \Lambda^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im einzelnen:

$$E'^1 = F'^{10} = \Lambda^1_\ell \Lambda^0_m F^{\ell m} = -\beta\gamma \Lambda^0_m F^{0m} + \gamma \Lambda^m_0 F^{1m}$$

$$= (\beta\gamma)^2 F^{01} + (\gamma)^2 F^{10} = \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)} F^{10} = E^1$$

$$E^{12} = F^{120} = U^2_{\ell} U^0_m F^{\ell m} = U^0_m F^{2m} = \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{21}$$

$$= \gamma(E^2 - vB^3)$$

$$E^{13} = F^{130} = U^0_m F^{3m}$$

$$= \gamma F^{30} - \beta\gamma F^{31}$$

$$= \gamma(E^3 + vB^2)$$

$$B^{11} = \frac{1}{c} F^{132} = \frac{1}{c} U^3_{\ell} U^2_m F^{\ell m} = \frac{1}{c} F^{32} = B^1$$

$$= \frac{1}{c} F^{32} = B^1$$

$$B^{12} = \frac{1}{c} F^{143} = \frac{1}{c} U^1_{\ell} U^3_m F^{\ell m} = \frac{1}{c} U^1_{\ell} F^{\ell 3} = -\frac{\beta\gamma}{c} F^{03} + \frac{\gamma}{c} F^{13}$$

$$= -\frac{\beta\gamma}{c} F^{03} + \frac{\gamma}{c} F^{13}$$

$$= \gamma \left(B^2 + \frac{v}{c^2} E^3 \right)$$

$$B^{13} = \gamma \left(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2 \right)$$

Zusammenfassung:

$$E'^1 = E^1$$

$$B'^1 = B^1$$

$$E'^2 = \gamma(E^2 - vB^3)$$

$$B'^2 = \gamma \left(B^2 + \frac{v}{c} E^3 \right)$$

$$E'^3 = \gamma(E^3 + vB^2)$$

$$B'^3 = \gamma \left(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2 \right)$$

Elektr. u. magnet. Felder werden beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen in einander transformiert.

Übersicherung

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{F}^{ik} &= \partial^i \tilde{\phi}^k - \partial^k \tilde{\phi}^i = \partial^i (\phi^k + \partial^k \varphi) - \partial^k (\phi^i + \partial^i \varphi) \\ &= \underbrace{\partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i}_{F^{ik}} + \underbrace{\partial^i \partial^k \varphi - \partial^k \partial^i \varphi}_0 = F^{ik} \end{aligned}$$

also F^{ik} erichinvariant!

Homogene Maxwellgl.

$$(1) \quad \nabla \cdot \underline{E} = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$

mit $\partial_1 = -\partial^1, \dots, F^{32} = -F^{23}, \dots$ folgt:

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0$$

1 2 3

2 3 1

3 1 2

zykl. (123)

$$(2) \quad \nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$$

1. Komp.: $\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \frac{\partial}{\partial t} B^1 = 0$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} + \partial_0 F^{32} = 0$$

mit $\partial_0 = \partial^0, \partial_2 = -\partial^2, \partial_3 = -\partial^3, F^{32} = -F^{23}, F^{20} = -F^{02}$:

$$\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0$$

zykl. (023)

zykl. Permutation $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ und $F^{ik} = -F^{ki}$

$$\partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} = 0$$

zykl. (013)

$$\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0$$

zykl. (012)

Zusammenfassung der homog. Maxwellgl.:

$$\epsilon_{iklm} \partial^k F^{lm} = 0$$

oder

$$\epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} = 0, \text{ "4-Relation"}$$

mit

$$\epsilon^{iklm} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (iklm) = \text{gerade Permut. von } (0123) \\ -1 & \text{wenn } (iklm) = \text{ungerade Perm. v. } (0123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4-dim. Levi-Civita-Tensor)

3-dim. Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{ikl} \partial^k a^l = (\nabla \times \underline{a})_i$

Bemerkung: (i) ϵ^{iklm} ist vollständig antisymmetrisch.

(ii) ϵ^{iklm} transformiert sich unter Lorentz-Transf.:

$$\begin{aligned} \epsilon'^{iklm} &= U^i_n U^k_p U^l_q U^m_r \epsilon^{npqr} \\ &= \begin{vmatrix} U^i_0 & U^i_1 & U^i_2 & U^i_3 \\ U^k_0 & U^k_1 & U^k_2 & U^k_3 \\ U^l_0 & U^l_1 & U^l_2 & U^l_3 \\ U^m_0 & U^m_1 & U^m_2 & U^m_3 \end{vmatrix} \epsilon^{iklm} \\ &= \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} \epsilon^{iklm} \end{aligned}$$

Damit $\epsilon'^{iklm} = \epsilon^{iklm}$, muss vereinbart werden, dass

$$\epsilon'^{iklm} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} U^i_n U^k_p U^l_q U^m_r \epsilon^{npqr}$$

Damit ist ϵ^{iklm} ein Pseudotensor

(Verallgemeinerung des 3-dim. Falles ϵ^{ikl} mit)

$$\left(\underbrace{(\nabla \times \underline{A})_i}_{\text{Pseudovektor}} = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k \right)$$