

Inhomogene Maxwell-Gln. (im Vakuum)

$$(3) \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho$$

$$\Leftrightarrow \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = \frac{1}{\epsilon_0 c} \rho$$

$$\Leftrightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_i F^{i0} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0} \quad \text{da } \partial_0 F^{00} \equiv 0 \quad i=0,1,2,3$$

$$(4) \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

1. Komponente:

$$\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \mu_0 j^1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1$$

$$\text{mit } \mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c} :$$

$$\Leftrightarrow \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1 + \partial_0 F^{10}$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_i F^{i1} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1} \quad \text{da } \partial_i F^{ii} = 0$$

analog für 2. und 3. Komp. !

Zusammenfassung der inhomog. Maxwell-Gln.:

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k} \quad (\text{„ 4-Divergenz“})$$

Bem.: (i) Die homog. Maxwell-Gln. sind durch den Potenzialansatz

$$F_{lm} = \partial_l \phi_m - \partial_m \phi_l$$

automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} = \underbrace{\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_l \phi_m}_{! = 0} - \underbrace{\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_m \phi_l}_{! = 0} = 0$$

infolge der Antisymm. von ϵ^{iklm}
($k \leftrightarrow l$)

$$\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_l \phi_m = -\epsilon^{iklm} \partial_l \partial_k \phi_m$$

(ii) Aus den inhomog. Maxwell-Gln.

$$\partial_i F^{ik} = \partial_i \partial^i \phi^k - \partial_i \partial^k \phi^i = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \quad k=0,1,2,3$$

folgt mit der Lorenz-Eichung $\partial_i \phi^i = 0$

$$\partial_i \partial^k \phi^i = \partial^k \partial_i \phi^i = 0$$

Also

$$\partial_i \partial^i \phi^k = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \quad \underline{\text{inhomog. Wellengl.}}$$

(iii) Die Maxwell-Gln.

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} &= 0 \\ \partial_i F^{ik} &= \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \end{aligned}}$$

sind Lorentz-kovariant, weil sie durch 4-Vektoren ausgedrückt sind.

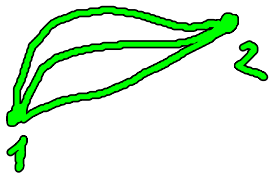
6.3 Relativistisches Hamilton-Prinzip

Ziel : Formulierung der Elektrodynamik als
Lagrange'sche Feldtheorie

Die relativist. Dynamik eines freien Massenpunktes
läßt sich aus dem Extremalprinzip

$$\delta W = 0, \quad W \sim \int_1^2 ds \quad (\text{Wirkungsintegral})$$

herleitet, wobei 1 und 2 Anfangs- und End-Ereignis
im 4-Raum sind und $\delta x^i|_{1,2} = 0$
 $ds = \frac{c}{\beta} dt$ Lorentzinvariant



Newton'sche Mechanik ist Grenzfall für $\beta \ll 1$:

$$\Rightarrow W = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1 - \beta^2)^{1/2} dt$$

$$\approx \underbrace{\left(-m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 \right)}_L dt$$

WW eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld $\varphi^i(x^j)$

$$\Rightarrow W = \int_1^2 \left\{ \underbrace{-m_0 c ds}_{\text{Lorentz-Invarianten}} - \underbrace{\varphi^i dx_i}_{\text{Lorentz-Invarianten}} \right\}$$

Variation:

$$\delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c \delta(ds) - \delta(\varphi^i dx_i) \right\}$$

$$\text{mit } \delta ds = \delta(dx^i dx_i)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{(d\delta x^i) dx_i + dx^i (d\delta x_i)}{ds}$$

$$\begin{aligned}
 (dx^i)' dx_i &= dx^i (d\delta x_i) \\
 &= \frac{dx^i}{ds} d(\delta x_i) = u^i d(\delta x_i)
 \end{aligned}$$

und $\delta(\varphi^i dx_i) = \delta\varphi^i dx_i + \varphi^i d(\delta x_i)$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c u^i d(\delta x_i) - \delta\varphi^i dx_i - \varphi^i d(\delta x_i) \right\} \quad \textcircled{*}$$

Part. Integr. $\underbrace{\left[-m_0 c u^i \delta x_i \right]_1^2}_{=0 \text{ weil } \delta x_i|_{1,2} = 0} + \int_1^2 m_0 c \frac{du^i}{ds} \delta x_i - \underbrace{\left[\varphi^i \delta x_i \right]_1^2}_0 + \int d\varphi^i \delta x_i$

$$\int_1^2 ds m_0 c \frac{du^i}{ds} \delta x_i$$

Mit $d\varphi^i = \partial^k \varphi^i dx_k = \partial^k \varphi^i u_k ds$

$\delta\varphi^i = \partial^k \varphi^i \delta x_k$

$\delta\varphi^i dx_i = \partial^k \varphi^i \delta x_k dx_i \stackrel{i \leftrightarrow k}{=} \partial^i \varphi^k \delta x_i dx_k = \partial^i \varphi^k u_k \delta x_i ds$

Einsetzen in $\textcircled{*}$:

$$\delta W = \int_1^2 ds \left\{ m_0 c \frac{du^i}{ds} - \left(\partial^i \varphi^k - \partial^k \varphi^i \right) u_k \right\} \delta x_i$$

Da $\delta W = 0$ für bel. Variation δx_i gilt, folgt:

$$m_0 c \frac{du^i}{ds} = f^{ik} u_k$$

$$\text{mit } f^{ik} := \partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i$$

relativist. Beweg. gl. eines Massenpunktes der Ruhemasse m_0 , Ladung q unter dem Einfluss der Lorenzkraft

Setze hierzu $p^i = m_0 c u^i$ 4-Impuls

$$f^{ik} = \frac{q}{c} F^{ik} = \frac{q}{c} (\partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i)$$

$$\phi^i = \frac{q}{c} \phi^i$$

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k$$

\Leftrightarrow

$$\delta W = \delta \int_1^2 \{ -m_0 c ds - \frac{q}{c} \phi^i dx_i \} = 0$$

$$L_{\text{Feld-Mat}} dt = (-q\phi - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) dt$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = -\frac{q}{c} \phi^i dx_i$$

Die Orthomp. $\alpha = 1, 2, 3$ stimmen nicht

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

überein, denn mit $u^0 = \gamma$, $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = -\frac{v^\alpha}{c} \gamma$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p^1 &= q (E^1 + v^2 B^3 - v^3 B^2) \\ &= q (F^{10} + F^{21} \frac{1}{c} v^2 - F^{13} \frac{1}{c} v^3) \\ &= \frac{q}{\gamma} (F^{10} \gamma - F^{12} \frac{1}{c} v^2 - F^{13} \frac{1}{c} v^3) \\ &= \frac{q}{\gamma} (F^{1k} u_k) \end{aligned}$$

mit $ds = \frac{c}{\gamma} dt$:

$$\frac{d}{ds} p^1 = \frac{q}{c} F^{1k} u_k$$

Newton mit Lorentzkraft

Die zeitartige Komponente $i=0$ gibt $p^0 = \frac{E}{c}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{E}{c} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c} (F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3) \\ &= q \frac{1}{c^2} (E^1 v^1 + E^2 v^2 + E^3 v^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = q \underline{E} \cdot \underline{v}}$$

Leistungsbilanz