

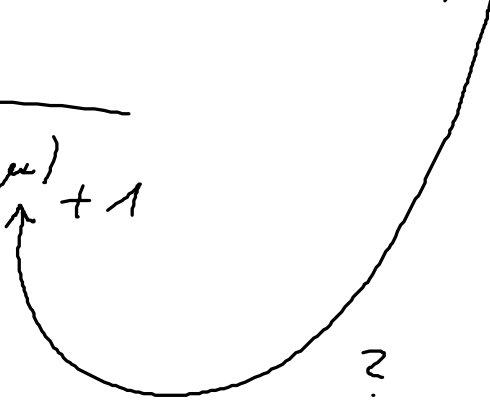
### 3.5.3 Ideales Fermigas

Modellsystem für Elektronen im Festkörper u. Atomen  
Nukleonen im Kern (Proton, Neutron)  
Quarks in Nukleonen  
flüssiges Helium ( $^3\text{He}$ )

Vorgehen in kompletter Analogie  
zum Bosegas, zunächst  $\mu$  bestimmen

Frage: Wie sind Tieftemperatureffekte im Vgl.  
zum Bosegas ausgebildet.

(Studium der Verteilungsfunktion  $\rightarrow \mu = \mu(T, \mu_0)$ )

$$f_{\varepsilon_k}^F = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$$


$\beta, \epsilon_k$ , bekannt;  $\mu$  unbekannt

$\mu$  wird bestimmt:

$$\bar{N} = \sum_{k,s} f_{k,s}^F = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

$\nearrow$  im Mittel festgelegt       $\uparrow$  zählt Gesamtzahl der Teilchen

implizite. Gleichung für  $\mu$ :  $\mu = \left( \frac{\bar{N}}{V} / T \right)$

$\downarrow$   
 $\mu_0$

Wenn man das umgestellt nach  $\mu$ .

besser ist es das Integral über  $\epsilon$  darzustellen

$$k \rightarrow \epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$d\epsilon = \frac{\hbar^2 k}{m} dk = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\epsilon} \frac{(2m)^{1/2}}{\hbar} d\epsilon = \frac{\hbar \sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$

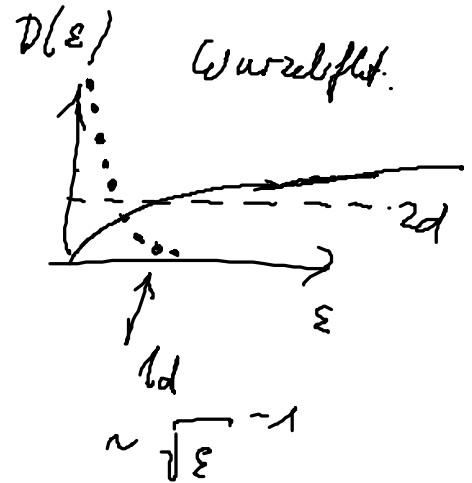
$$\mu_0 = \frac{\textcircled{2}}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk k^2 f_{\epsilon_k}^F$$

$\uparrow$  Kugelkoordinaten  
 Spinsumme  $\uparrow \downarrow$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\mu}}{t\sqrt{2}} (\sqrt{\varepsilon})^{-1} \varepsilon^{\frac{2\mu}{t^2}} f_{\varepsilon}^{\bar{F}}$$

$$u_0 \equiv \int d\varepsilon \underline{D(\varepsilon)} f_{\varepsilon}^{\bar{F}}$$

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\mu^{3/2} \sqrt{2}}{t^3} \sqrt{\varepsilon}$$

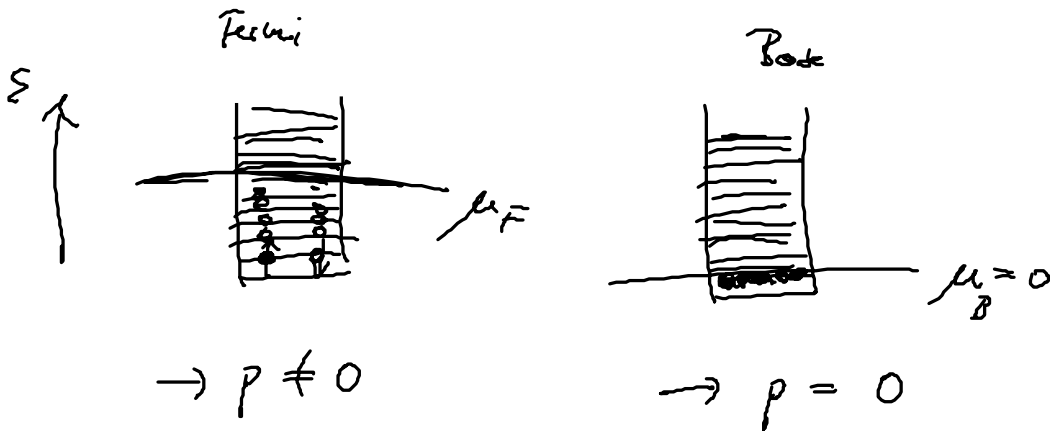
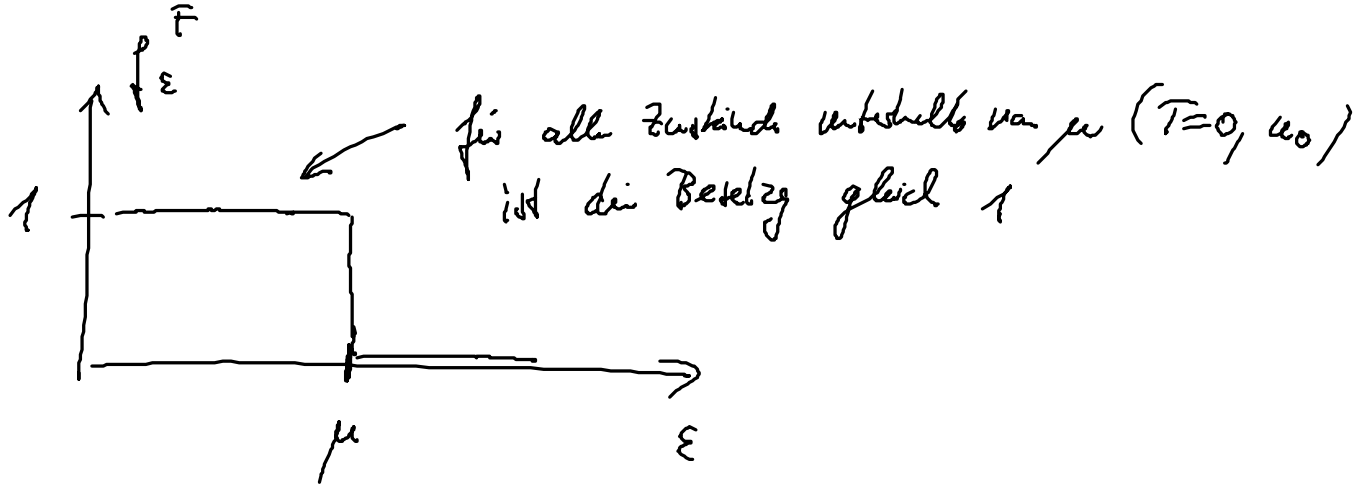


$D(\varepsilon)$  nennt man Zustandsdichte, wird davon erkannt, daß, wenn formal  $f_{\varepsilon}^{\bar{F}} \equiv 1$  setzt die Zustände pro  $\varepsilon$ -Intervall zählt und dann alle aufsummiert.

Diskussion f.  $T \rightarrow 0$

$$(i) \quad \underline{T=0} \quad f_{\varepsilon}^{\bar{F}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \quad \begin{array}{l} T \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty \end{array}$$

$$= \begin{cases} \varepsilon < \mu(T=0) : e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \rightarrow 0 \Rightarrow f_{\varepsilon}^{\bar{F}} = 1 \\ \varepsilon > \mu(T=0) : e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \rightarrow \infty \Rightarrow f_{\varepsilon}^{\bar{F}} = 0 \end{cases}$$



wie sieht  $\mu = \mu(T=0, u_0)$  aus?

$$u_0 = \int_0^{\mu(T=0, u_0)} d\varepsilon D(\varepsilon) = \int_0^{\mu(T=0, u_0)} d\varepsilon \frac{1}{4^2} \frac{u^{3/2} \sqrt{2}}{4} \sqrt{\varepsilon}$$

Dichte  
vorgegeben

$$u_0 = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \mu^{3/2}(T=0)$$

$$\mu(T=0, u_0) = \varepsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} u_0^{2/3}$$

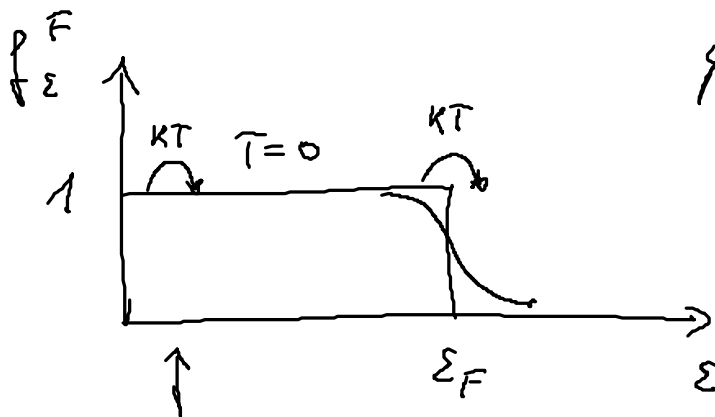
Das chemische Potential f.  $T=0$

hat die Name "Fermienergie".

Die Fermienergie wächst mit Dichte  $^{2/3}$ .

Damit ist  $T=0$  Problem gelöst

(ii) Was erwartet man für etwas höhere Temperaturen, so daß man aber noch nicht klassische Eigenschaften reproduziert.



qualitativ!

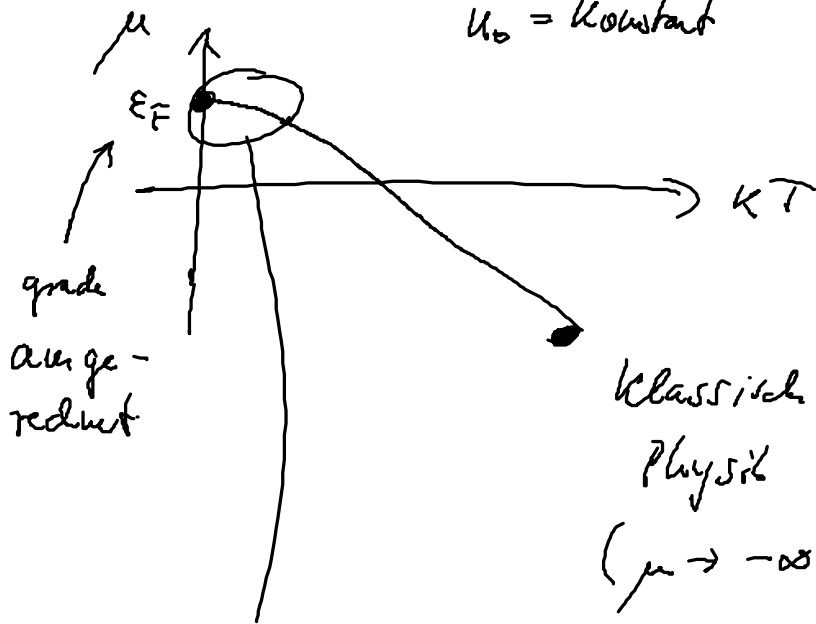
$kT \neq 0 \rightarrow$  flüssige Fermie  
Ausschmelzen der Fermikante

hier wird  
 $kT$  nicht 0  
ausreichen  
wegen Pauli verbot

Um das zu beschreiben muß  $\mu = \mu(T \neq 0, \mu_0)$

bestimmt werden

$u_0 = \text{konstant}$



im Gegensatz zu Bosonen  
kann  $\mu > 0$  sein  
(alle Werte  $\leq 0$ )  
weil keine Singularität  
existiert

Verwend das auszurechnen f.  $kT \neq 0$ , aber klein

benut  $u_0 = \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\varepsilon}^{\bar{F}}$  für kleine  $kT$  zu extrahieren.

$$= \int_0^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\varepsilon}^{\bar{F}} + \int_{\mu}^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\varepsilon}^{\bar{F}}$$

$$= \int_{\mu}^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\varepsilon}^{\bar{F}} + \int_0^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon) \left( 1 - \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{D^{\bar{F}}}$

$$= \int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon) + \int_0^\infty \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu + x/\beta)}{e^x + 1} - \int_0^{\beta\mu} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu - x/\beta)}{e^x + 1}$$

Integral substitution:  $x = \beta(\varepsilon - \mu)$

$$x = -\beta(\varepsilon - \mu)$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

$$u_0 = \int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon) + 0 + \int_0^\infty \frac{dx}{\beta} \frac{D'(\mu)}{e^x + 1} \frac{x}{\beta} \cdot 2$$

$\uparrow$   
 f.  $\beta \rightarrow \infty$  in  
 Grenze und  
 $\frac{x}{\beta} \rightarrow 0$

$\uparrow$   
 1. Ordng. Taylor  
 $\uparrow$   
 beide  
 Term  
 identisch

$$u_0 = \int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon) + \frac{2}{\beta^2} D'(\mu) \frac{\pi^2}{12}$$

$D'(\varepsilon) \cong (\sqrt{\varepsilon})'$   
 $\nearrow$   
 $\times$ -Integral  
 nach Schätzen

$$u_0 = a \int_0^\mu d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{a}{2\sqrt{\mu}}$$

$\nearrow$   
 Verhalten  
 ( $\mu, T, \dots$ )  
 $\searrow$

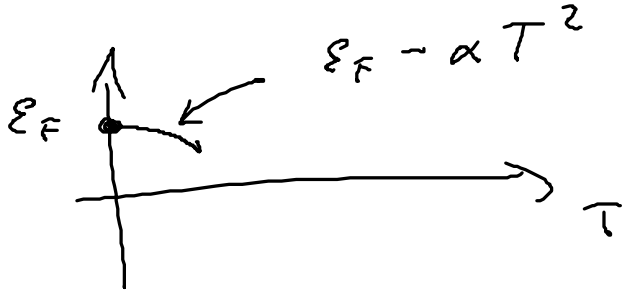
$$\left(\frac{2a}{3}\right) \varepsilon_F^{3/2} = \frac{2a}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{a}{2\sqrt{\mu}}$$

implizite gl. f.  $\mu \approx \varepsilon_F + \delta\mu$

$$\rightarrow \delta\mu = -\varepsilon_F \left( \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F^2} \right)$$

$$\mu = \varepsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F^2} \right)$$





## Bemerkungen

- a) chemisches Potential bei Fermionen kann positiv / negativ sein  
 b) Spezifische Wärme  $C_V$  ein Elektronengas

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_V = \frac{\pi^3}{3} D(\epsilon_F) T \sim T$$

Man braucht  $E$ , kann man auch  $\bar{N}$  für

$$\bar{E} = \sum_{k,s} \epsilon_k f_{k,s}^F$$

$T \rightarrow 0$  ausrechnen  
 $(D(\epsilon) \rightarrow \epsilon D(\epsilon))$

ohne  $\epsilon$  wäre das  $\bar{N}$  ( $u_0$ )  
 das wir gerade berechnet  
 haben.

Aus der Beding. für  $u_0$ , mit  $D(\epsilon) \rightarrow \epsilon D(\epsilon)$

bekannt man wieder  $u_0 \sim E \sim T^2$ .

→ Die spezifische Wärme eines Elektronengases

für  $T \rightarrow 0$  ist proportional zu  $T$ .

Festkörper insgesamt:  $C_v \sim C_1 T + C_2 T^3$

Einkristall      Phononen  
↑                    ↑  
(einige Kelvin)    (gewinnt f. kleine  $T$ )

c) Druck und Zustandsgleichung:

$$p = \left(2\right) \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{4}{3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon D(\epsilon) \sim \epsilon_F^{5/2} \quad (\text{ÜA})$$

leichte VL       $T \rightarrow 0$

Druck und Energie verschwindet nicht bei  $T=0$ .

Folge d. Pauliverbots, da verbietet, dass  
El sich in ein und denselben Zustand / Ort aufhalten können  
im Gegensatz zu Bosonen.

System unip ausgefüllt bleiben. um Überlapp der Wellen-  
funktion zu vermeiden.

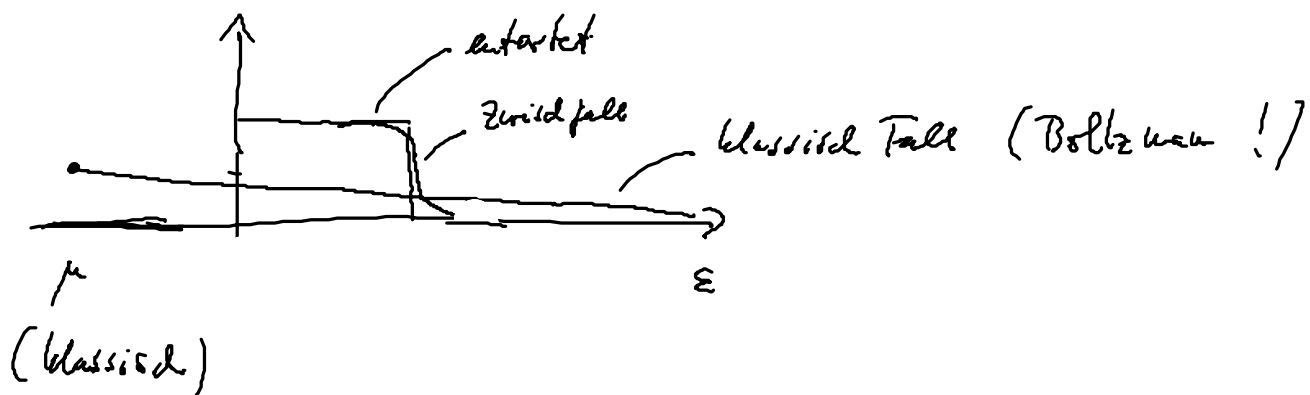
d) Entwidg. / Leitfähigkeit  $\epsilon_F \gg kT$

Was ist ein System kalt

$kT \ll \epsilon_F$ , unter Betrachtung gelte für

$\frac{kT}{\epsilon_F} = \text{klein!}$   $\mu$  nicht unbedingt  $T=0$  sein

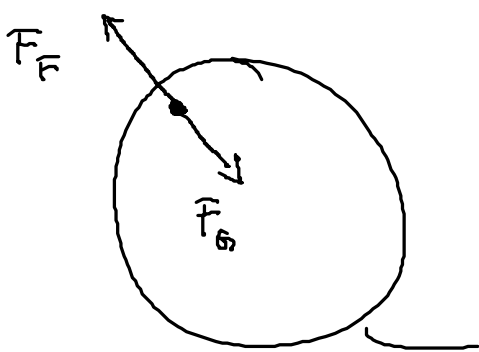
kalte System wo man noch ein eher stufe artige  
Funktio. hat wenn man aufartet



Beispiel f. entartet fern bei Zimmertemp.:

Metalle !  $\epsilon_F \approx 1-10 \text{ eV}$ ,  $kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$

e) Himmelskörper im fließgew. von  
Gravitation und Term. druck :



Stabil nur für

gleichgewicht von Gravitation und  
kinetische Druck  $p$

Sonne

Naher Stern  
als Fermigas

unsere Sonne:  $F_g$  als Boltzmann verteilt (nicht entartet)

keine gravitationskraft kompensieren

$kT$  ist recht hoch.

Neutron stern /

weiße Zwerge

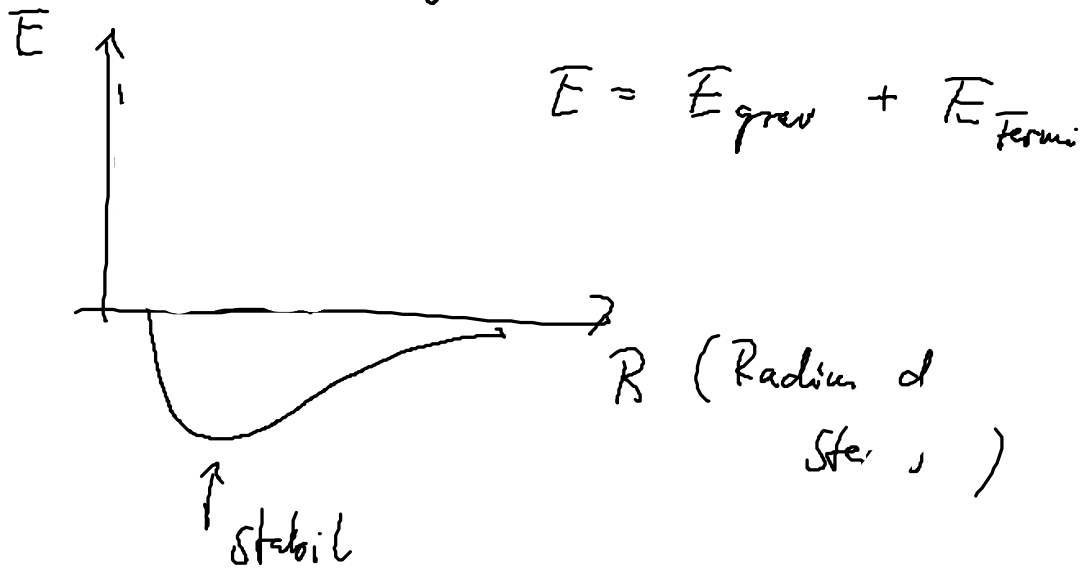
(Elektronen gas)

:  $F_g$  als entartet weil Dichte so hoch ist und  
 $E_F \rightarrow u_0^{2/3} \gg kT$

Schliessen ab Metall bei

Zimmertemperatur

Idem zur Bestimmung d. Gleichgewichts:



$$E_{\text{fermi}} \sim u_0^{2/3} \sim +R^{-2} \quad \text{---}$$

$$E_{\text{grav}} \sim \int d^3r \int d^3r' \frac{u_0(r) u_0(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sim -R^{-1} \quad \text{---}$$

