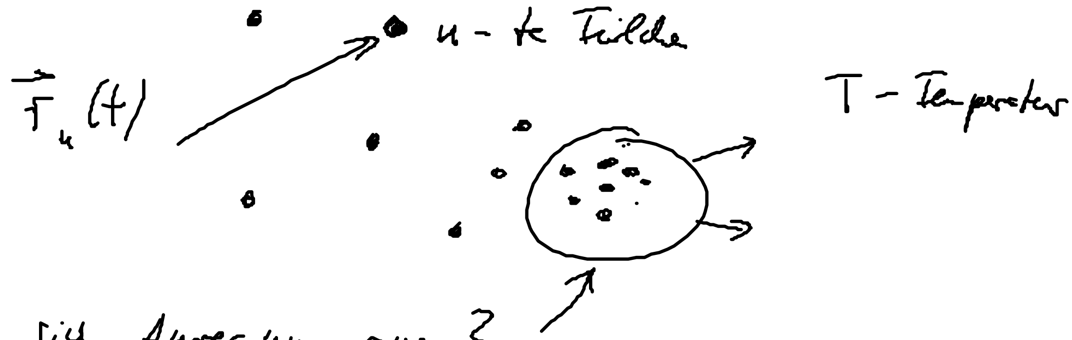
6) Auf statistischem Weg durch die klassischen Gleichungen der Physik

Gas: klassisches System



wie breiten sich Anregungen aus?

$$\underbrace{\text{Diffusion} \qquad\qquad \text{Wellenanregungen}}_{\text{qualitativ verschieden}}$$

qualitativ verschieden,
kann man die fundamental ableiten?

hier klassische Theorie, der Einfachheit halber
quantenmechanisch gilt das auch, nahezu analog, aber komplizierter

Suchen: $n(r,t) = ?$ gesucht

Dichte des Gases von Ort, Zeit

stellen die Gleichung f. Massedichte $\rho(\vec{r},t)$ und

Massestromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ analog Elektrodynamik

Masse $\Longleftrightarrow$ Ladung

$$\rho(\vec{r},t) \equiv \Big\langle \sum_n m_n \, \delta\big(\vec{r}-\vec{r}_n(t)\big) \Big\rangle$$

Mittlg., um zu verschmieren und statistisch Aussagen zu machen

Bahnkurve

Masse des n-ten Teilchens

$\left(\underset{ED}{m_n \Longleftrightarrow q_n} \right)$

$$\vec{j}(\vec{r},t) \equiv \Big\langle \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \, \delta\big(\vec{r}-\vec{r}_n(t)\big) \Big\rangle$$

Geschwindigkeit

Geschwindigkeitsfeld

Ziel ist Gleichungssystem für $\underline{\rho(\vec{r},t)}$ und $\underline{\underline{\vec{j}(\vec{r},t)}} = \rho(\vec{r},t)\,\vec{u}(\vec{r},t)$

zu finden aus $m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n$ der klassischen Newtongl.

äußere u. innere Kräfte (Gravitation)

$$\partial_t \rho(\vec{r},t) = \Big\langle \sum_n m_n \; -\dot{\vec{r}}_n \cdot \vec{\nabla}_r \, \delta\big(\vec{r}-\vec{r}_n(t)\big) \Big\rangle$$

innere Ableitung

Vektorgradient als äußere Ableitung

$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \Big\langle \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \, \delta\big(\vec{r}-\vec{r}_n(t)\big) \Big\rangle$$

kann aus < ?
herausgenommen werden

Kontinuitätsgleichung für Massendichte / Massenstromdichte:

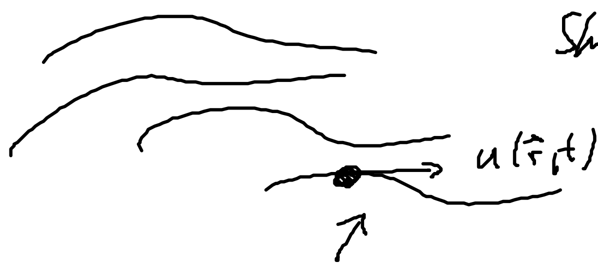
$$\partial_t \rho(r,t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t)$$

Konsistente Definition der ρ, j.

damit ist die Gleichg. für ρ da, es fehlt noch die Gleichg. f. $\vec{j}$:

Ansatz:

Stromlinie des „fließenden" Gases



Bewegung eines Probeteilchens
am Ort $\vec{r}$ gibt mir eine
Geschwindigkeit am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t

Damit ist ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{r},t)$ definiert.

Ansatz: $\vec{j}(r,t) = \vec{u}(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t)$

$\vec{u}(\vec{r},t)$ damit definiert und es muß
eine Gleichg dafür hergeleitet werden

$$\vec{j}, \rho \longrightarrow \underbrace{\vec{u}, \rho}$$

dies ist ein Satz hydrodynamischer Variablen,
genügen den hydrodynamischen Gleichungen

Sinnhaftigkeit des Ansatzes wird gezeigt

geht $\vec{j} \to \vec{u}$ + Glchg. für $\vec{u}$ ableiten:

$$(1)\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-te Komponente von } j}}{\partial_t j_i} \overset{\text{Definition/Ansatz}}{=} \partial_t (\rho u_i) = (\partial_t u_i)\rho + u_i(\partial_t \rho)$$

$$\partial_t j_i = (\partial_t u_i)\rho - u_i \overbrace{\partial_j u_j \rho}^{\hat{=}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}}$$

(1. Mgl. $\partial_t j_i$ darzustellen)

$$(2)\ \partial_t j_i = \partial_t \left\langle \sum_n m_n \dot{r}_{n_i}(t)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right\rangle$$

ite Komponente der Bewgg. des n-ten Teilchens

$$= \left\langle \sum_n \left(F_i(\vec{r}_n)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) - \dot{r}_{n_i} m_n \partial_j\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))\, \dot{r}_{n_j}(t) \right) \right\rangle$$

Kraftdichte einführen $\frac{F_i}{m_n} = f_i$ ($f_i \hat{=}$ Kraftdichte)

(2. Mgl. $\partial_t j_i$ darzustellen)

(1) = (2) setzen:

$$\rho \, \partial_t u_i - u_i \, \partial_j (u_j \rho) = f_i(r,t)\, \rho - \underline{\partial_j} \underbrace{\langle \sum_n m_n \dot r_{n_i} \dot r_{n_j} \, \delta(\vec r - \vec r_n) \rangle}$$

Kraftdichte variiert schwach über Mittlungsvolumen

wenn man den hier als Funktion von $\rho, \vec u$ darstellen könnte, wäre man fertig.

Problem: $\rho \xrightarrow[\text{koppelt}]{} \vec j / \vec u \rightarrow \langle \dot{\vec r} \dot{\vec r} \dots \rangle$

„kinetische Energie“

immer höhere Momente von $\dot{\vec r}$ koppeln an

≙ Hierarchieproblem

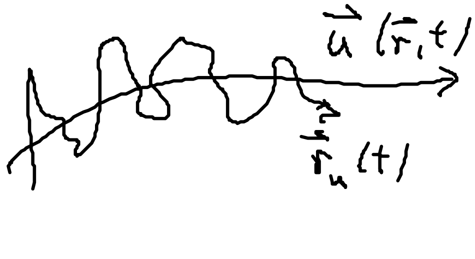
um das zu lösen, müssen Näherungen gemacht werden

<u>dazu</u>:

Bewegg. um „mittlere“ Strömg.

$$\dot{\vec r}_n(t) = \vec u(\vec r, t) + \delta \dot{\vec r}_n(t)$$

im allgemeinen muß das als klein angenommen werden.



$\langle \dot r_{ni} \, \dot r_{nj} \; \delta(\cdots) \rangle$ enthält :

$$(u_i + \delta \dot r_{ni})(u_j + \delta \dot r_{nj}) \sim$$

$\underline{u_i u_j}$ $\longrightarrow$ sind schwach veränderliche Felder über $\vec r$
zieht man aus Mittlg. raus

$u_i \, \delta \dot r_{nj}$ $\longrightarrow$ Mittlg. über Fluktuation δ $\Longrightarrow$ 0

$\delta \dot r_{ni} \, \delta \dot r_{nj}$ $\longrightarrow$ wird Drucktensor verkauft

$$\partial_j \left\langle \sum_n m_n \, \delta(\vec r - \vec r_n) \, \dot r_{ni} \, \dot r_{nj} \right\rangle = \underline{\partial_j (u_i u_j \rho)} + 0 + \partial_j p_{ij}$$

$$\underbrace{p_{ij} \equiv \left\langle \sum_n m_n \, \delta(\vec r - \vec r_n) \, \delta \dot{\vec r}_{ni} \, \delta \dot r_{nj} \right\rangle}_{\text{Definition des Drucktensors}}$$

alle Gleichg. sammeln (1) = (2) :

$$\rho \, \partial_t u_i - u_i \, \partial_j (u_j \rho) = f_i \rho - \partial_j (\rho u_i u_j) - \partial_j p_{ij}$$

$$\underbrace{\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = f_i - \frac{1}{\rho} \partial_j p_{ij}}$$

das ist die gesuchte Glchg. für $\vec{u} = (u_i)$

Interpretation von p_{ij}:

nur: Diagonalelemente:

$$p_{ii} = \langle \sum_n m_n \, \delta\dot{r}_{ni}^2 \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle$$

$$= 2 \, \underbrace{\langle \sum_{n,i} \frac{m_n}{2} \delta\dot{r}_{ni}^2 \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle}_{} \, \frac{1}{3}$$

kinet. Energie die in den Teilchenfluktuationen der Gase steckt

$\uparrow$ f. homogene System über 3 Raumrichtung

$$\left.\frac{\bar{E}_{kin}}{V}\right|_{\text{Gas in Ruhe}} = \frac{3}{2} \frac{N}{V} kT$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \frac{N}{V} kT$$

$$= n k T = \underline{\underline{P}}$$

$\nearrow$ Druck des idealen Gases

p_{ij} hat was mit Druck zu tun!

Damit ergeben sich insgesamt die hydrodynamischen Gleichg:

1) Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\rho) = 0$

2) Navier-Stokes-Gleichung: $\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$

$p_{ij} = \delta_{ij} p_{ij} = p_{ii}$

System v. Gleichgn f. Flüssigkeit, Gas, deformierbare Festkörper

Reibung wird phänomenologisch berücksichtigt durch

$-\gamma\vec{u}$ auf d. recht. Seite der Navier-Stokes gl.

p muß bekannt sein als Funktion von $\rho(r,t)$

$$p = \frac{N}{V} kT = m\rho\, kT$$

$p \uparrow (\bar{r},t)$, $\rho \uparrow (\bar{r},t)$

„lokales Gleichgewicht" (weil p im GG. berechnet wurde)

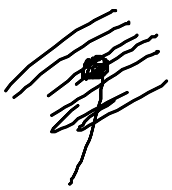
diese Gleichungen sind schwierig, nichtlinear:

$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{u} \;\hat{=}\;$ <u>Turbulenz</u>

wichtig wenn $\vec{u}$ sehr groß

ohne Turbulenz leiten wir sowohl Diffusion als auch Welle her:

a) ohne Reibung $\longrightarrow$ Wellenlösungen



homogenes Medium (ruhend)

Störg.

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$$\vec{u} = 0 + \delta\vec{u}$$

$$p = p_0 + \delta p$$

$$\delta = \delta(\vec{r}, t)$$

Kontinuität: $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$

linearisiert: $\partial_t \delta\rho + \vec{\nabla}\cdot(\delta\vec{u}\cdot\rho_0) = 0$

Navier-Stokes: $\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$

linearisiert: $\partial_t \delta\vec{u} + 0 = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta p$

$$\partial_t^2 \delta\rho + \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\delta p) = 0$$

$$\partial_t^2 \delta\rho - \Delta\delta p = 0$$

Zustandsgleichung: $p = p(\rho)$

$$p = p_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}_{[v^2] \text{ Dimension Geschw.}^2} \delta\rho$$

$$\partial_t^2 \, \delta\rho - v^2 \Delta \, \delta\rho = 0$$

$$\Delta \, \delta\rho - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \, \delta\rho = 0$$

Wellengleichg. f. Dichteausbreitung mit Geschwindigkeit v :

$$v^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \underset{\text{ideal Gas}}{=} \frac{\partial \frac{\rho}{m} kT}{\partial \rho} = \frac{kT}{m}$$

Geschwindigkeit ist temperaturabhängig!

b) mit Reibung $\longrightarrow$ Diffusionsgleichg.

Kontinuität $\quad \partial_t \, \delta\rho = - \vec{\nabla} (\delta \vec{u} \, \rho_0)$

Navier-Stokes: $\quad \partial_t \, \delta\vec{u} = - \frac{v^2}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta\rho - \gamma \, \delta\vec{u}$

wichtig

$\gamma\, \delta\vec{u} \gg \partial_t\, \delta\vec{u}$ aus (a)

$$\delta\vec{u} = -\frac{v^2}{\rho_0 \gamma} \vec{\nabla} \delta\rho$$

einsetzen in Kontinuität:

$$\partial_t \delta\rho = \vec{\nabla} \cdot \frac{v^2}{\gamma} \vec{\nabla} \delta\rho$$

$$\partial_t \delta\rho = \frac{v^2}{\gamma} \Delta \delta\rho$$

ist eine Diffusionsgleichung mit der

Diffusionskonstante $\underline{\underline{D}} = \frac{v^2}{\gamma} \sim \underline{\underline{kT}}$ (Einsteinrelation)