6.1 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\underline{\Psi}^{SD}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_1(\underline{x}_1) & \psi_1(\underline{x}_2) \\ \psi_2(\underline{x}_1) & \psi_2(\underline{x}_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(\underline{x}_1)\psi_2(\underline{x}_2) - \psi_2(\underline{x}_1)\psi_1(\underline{x}_2) \right)$$

$$\Rightarrow \Psi^{SD}(\underline{x}_2, \underline{x}_1) = -\underline{\Psi}^{SD}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \Rightarrow \text{Pauli-Prinzip}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \ldots\ldots \end{array}\right\} = | n_1 n_2 \ldots \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{N} A(i) | n_1 n_2 \ldots \rangle = \ldots\ldots \quad \psi_{\nu_1}(1) \ldots A(i)\psi_{\nu_i}(i) \ldots \psi_{\nu_N}(N) \ldots$$

$$A(i)\psi_{\nu_i}(i) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \psi_\lambda(i) A_{\lambda\nu_i} \text{ mit } A_{\lambda\nu_i} = \langle \psi_\lambda | A | \psi_{\nu_i} \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_\lambda \ldots\ldots \psi_\lambda(i) A_{\lambda\nu_i} \ldots\ldots \Longleftrightarrow n_1 n_2 \ldots n_{\nu_i}-1 \ldots n_\lambda+1 \ldots$$

$$\ldots a_\lambda^+ a_{\nu_i} | n_1 n_2 \ldots n_{\nu_i} \ldots n_\lambda \ldots \rangle$$

$$a_\lambda a_\lambda^+ |n_1 n_2 \dots\rangle = a_\lambda \sqrt{n_\lambda+1}\, |n_1 n_2 \dots n_\lambda+1 \dots\rangle$$
$$= \sqrt{n_\lambda+1}\sqrt{n_\lambda+1}\, |n_1 n_2 \dots n_\lambda \dots\rangle$$
$$= (n_\lambda+1)\, |n_1 n_2 \dots\rangle$$

$$a_\lambda a_\mu^+ - a_\mu^+ a_\lambda = [a_\lambda, a_\mu^+] = \delta_{\lambda\mu}\, \mathbb{1}$$

$$0 = \{a_\lambda^+, a_\lambda^+\} = a_\lambda^+ a_\lambda^+ + a_\lambda^+ a_\lambda^+ = 2 a_\lambda^+ a_\lambda^+ = 0$$

$$a_\lambda^+ a_\lambda^+ |n_1 n_2 \dots\rangle = 0\, |n_1 n_2 \dots\rangle \text{ kein Zustand}$$

$$a_\lambda^+ a_\lambda^+ |n_1 n_2 \dots \underset{\lambda}{0} \dots\rangle = a_\lambda^+ |n_1 n_2 \dots \underset{\lambda}{1} \dots\rangle = 0$$

$$n_\lambda = 0, 1$$

$$[\hat\psi(\underline{x}), \hat\psi^+(\underline{x}')] = \sum_{\nu,\mu} \psi_\nu(\underline{x})\, \psi_\mu^*(\underline{x}') \underbrace{[a_\nu, a_\mu^+]}_{\delta_{\nu\mu} \mathbb{1}}$$
$$= \sum_{\nu,\mu} \psi_\nu(\underline{x})\, \psi_\mu^*(\underline{x}')\, \delta_{\nu\mu}\, \mathbb{1}$$
$$= \sum_\nu \psi_\nu(\underline{x})\, \psi_\nu^*(\underline{x}')\, \mathbb{1} = \delta(\underline{x}-\underline{x}')$$

Vollständigkeitsbeziehung

$$\hat N = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda^+ a_\lambda = \underbrace{\sum_\lambda \int d\underline{x}\, d\underline{x}'\, \psi_\lambda(\underline{x})\, \hat\psi^+(\underline{x})\, \psi_\lambda^*(\underline{x}')}_{\delta(\underline{x}-\underline{x}')}\, \hat\psi(\underline{x}')$$

$$= \int d\underline{x}\, d\underline{x}'\, \hat\psi^+(\underline{x})\, \hat\psi(\underline{x}')\, \delta(\underline{x}-\underline{x}') = \int \hat\psi^+(\underline{x})\, \hat\psi(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Teilchenzahlzustand $|n_1 n_2 n_3 \dots\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}$

mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu = N$ Teilchenzahl