

2. Vektor- und Tensorrechnung

- Motivation:
Grundlagen der Vektor-/Tensorrechnung wiederholen,
wichtig für Kontinuumsmechanik

2.1 Grundlagen des Euklidischen Raumes

a) physikal. Anschauungsraum

- im folgenden:

Physikal. Anschauungsraum A
= euklidischer Raum = flacher Raum (2.1)

→ euklidische Geometrie gilt:

Bsp: (i) Winkelsumme im Dreieck = 180°

(ii) Satz von Pythagoras, $a^2 + b^2 = c^2$

(iii) Parallelaxiom:

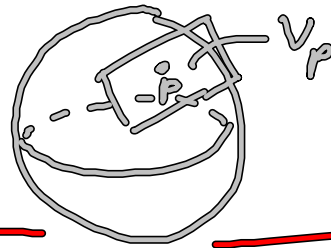
In einer Ebene gibt es zu jeder Geraden g
und jedem Pkt. S (außerhalb von g)
genau eine Gerade, die zu g parallel
ist und durch S geht

- Unterscheide:

(i) physikalischer Anschauungsraum A mit Punkten P

(ii) Vektorraum V_P („Tangentenraum“), angeheftet an
jeden Pkt. P , in dem die physikal. Vektoren wirken.

- flacher Raum: Pkte. in A definieren Vektoren
→ Unterscheidung künstlich!
- gekrümmte Räume: Bsp:



• Def:

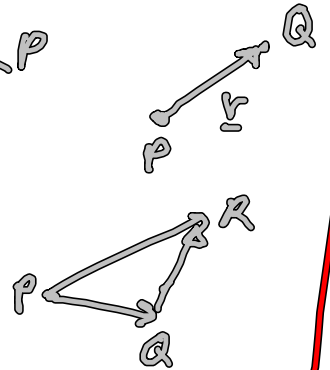
Ein Punkttraum A mit Pkten P, Q, \dots und ein Vektorraum V bilden einen affinen Raum, wenn gilt:

(1) $P, Q \in A \rightarrow$ Verbindungsvektor $\underline{v} = \overrightarrow{PQ} \in V$

(2) „Abtragen“ eines Vektors $\underline{v} \in V$ von P führt zu genau einem Q

(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Dreiecksregel)

(4) $\overrightarrow{PQ} = 0 \rightarrow P = Q$



(2.2)

• Def:

Ist V ein euklidischer Vektorraum, so bildet er mit A einen euklidischen Raum

(2.3)

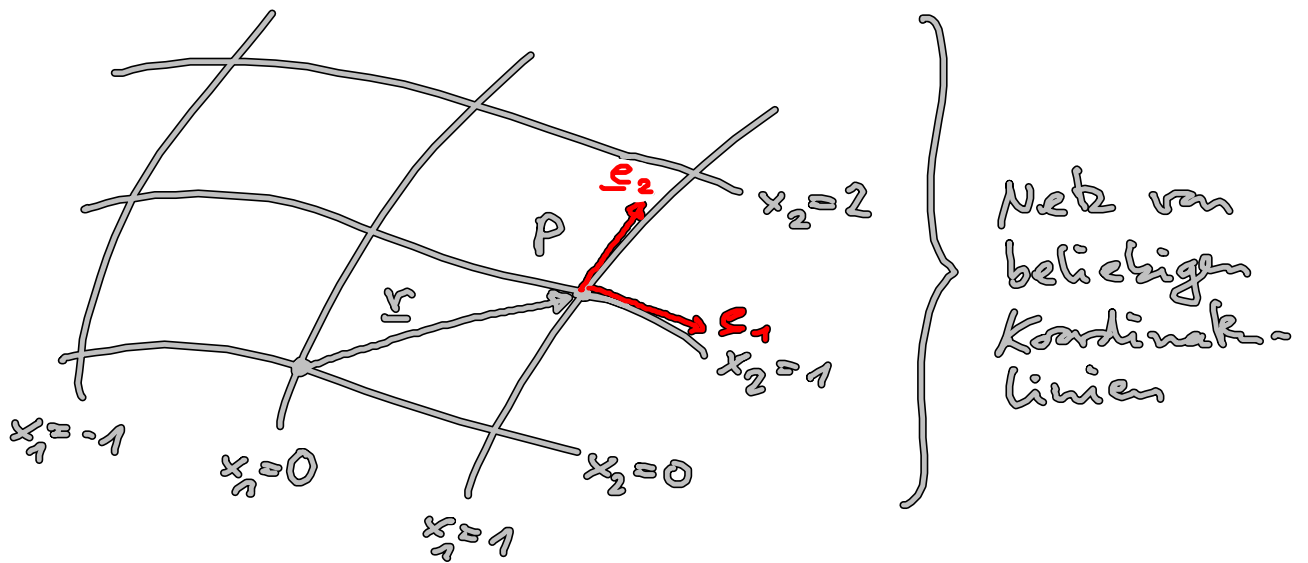
→ Abstandsmessung in A über Skalarprodukt in V : $d(P, Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$ (2.4)

NB: gekrümmte Räume \neq affine Räume

b) Koordinatensysteme

- Motivation: Koordinaten von Pkt. P , für Beschreibung von Skal., Vektor-, Tensorfeldern
- Ort von Pkt. $P \leftrightarrow$ Koordinaten triplet: (x_1, x_2, x_3)

(i) allgemeine (krümmelige) Koordinaten:



- Ort von P : (x_1, x_2, x_3) mit Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ [eV]
- natürliche (Koordinaten) Basis für V_P angeheftet an P :
- normierte Tangentialvektoren \underline{e}_i an x_i -Linien ($x_j = \text{const.}$, $j \neq i$)

also:

$$\underline{e}_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

mit $|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$ und $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ nicht ortsfest

$$\rightarrow T_{kl}^i = \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial x_l} \quad (2.6)$$

... „Konnexionskoeffizienten“

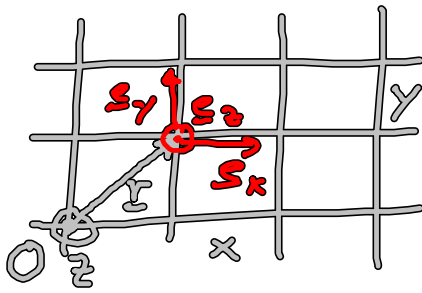
NB: (1) i. S. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ (2.7)

(2) in ART: $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

also Orthonommbasis (ONB)

δ_{ij} ... Kronecker symbol

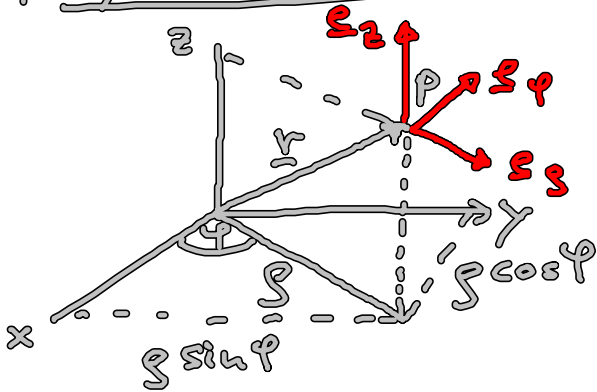
(ii) kartesische Koordinaten



$p(x, y, z)$

- $\{e_x, e_y, e_z\}$ orthonormal } $\underline{r} = x_i e_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (2.8)
- $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad i, j = x, y, z$ } $T_{41}^i = 0!$

(iii) Zylinderkoordinaten



$P: (\rho, \varphi, z)$

Polar Koordinaten in der Ebene

$$\underline{r} = \rho \cos \varphi e_x + \rho \sin \varphi e_y + z e_z$$

$$= \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

- Koordinatenbasis: ortsabhängig!

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = e_\varphi \rightarrow T_{\rho\varphi}^\varphi = 1$$

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = e_\rho \rightarrow T_{\varphi\rho}^\rho = 1$$

$$e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_{z1}^i = 0$$

- $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad i, j = \rho, \varphi, z$

- NB: $\underline{r} = \rho e_\rho + z e_z$ (2.11)

(iv) Kugelkoordinaten: \rightarrow Übungen!

2.2 Tensoren 2. Stufe

a) Einordnung

Tensoren 0. Stufe = Skalare

• 1. Stufe = Vektoren $\underline{a} \in V_p$

$$\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i \quad \text{mit } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \dots \text{ONB in } V_p$$

↑
Einstein'sche
Summenkonvention

(2.14)

Schreibweise:

$$\underline{a} \begin{cases} \text{Vektor} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

jetzt Tensor 2. Stufe

b) Definition & dyadisches Produkt:

• Def:

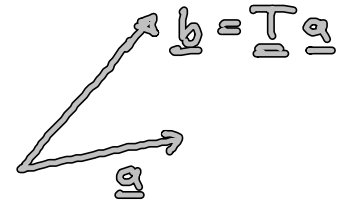
Tensor 2. Stufe vermittelt eine lineare Abbildung von V_p in sich:

$$\underline{I}: V_p \rightarrow V_p$$

$$\underline{I}: \underline{a} \rightarrow \underline{b} := \underline{I}\underline{a}, \quad \underline{a}, \underline{b} \in V_p$$

$$\text{Linearität: } \underline{I}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\underline{I}\underline{a} + q\underline{I}\underline{b}$$

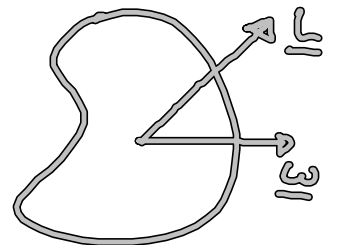
$$p, q \in \mathbb{R}$$



• Bsp 1: starrer Körper:

$$\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

↑ ↑ ↑
Drehimpuls Trägheitstensor Winkelgeschw.



$$(2.15)$$

Bsp 2: Spannungstensor: charakterisiert Material (→ Kapitel 3)

[Herkunft des Wortes: Tensor (lat. tendo: ich spanne)]

• Komponenten von $\underline{\underline{I}}$ bzgl. Basis in V_p : \rightarrow Rechnen

Voraussetzung: Koordinatenbasis = ONB: $\underline{\underline{\varepsilon}}_i \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_j = \delta_{ij}$
 $i, j = 1, 2, 3$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i \mid \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{I}} \underline{\underline{a}} \rightarrow b_i = \underline{\underline{\varepsilon}}_i \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_i \cdot \underline{\underline{I}} \underline{\underline{a}}$$

$$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{\underline{a}} = a_j \underline{\underline{\varepsilon}}_j} b_i = \underbrace{(\underline{\underline{\varepsilon}}_i \cdot \underline{\underline{I}} \underline{\underline{\varepsilon}}_j)}_{T_{ij}} a_j$$

$$\rightarrow \boxed{T_{ij} := \underline{\underline{\varepsilon}}_i \cdot \underline{\underline{I}} \underline{\underline{\varepsilon}}_j} \quad (2.16)$$

... Komponenten von $\underline{\underline{I}}$

$$\rightarrow \boxed{b_i = T_{ij} a_j} \quad (2.17)$$

Schreibweise:

$$\underline{\underline{I}} \begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung } \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{31} & \dots & T_{33} \end{pmatrix} \end{cases}$$

also: $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{I}} \underline{\underline{a}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{lineare Abbildung: darstellungsfrei} \\ \text{''} \\ \text{''} \end{array} \right. \text{ : in Matrixschreibweise}$

• Def:

Das Tensor- / dyadische Produkt von $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}} \in V_p$

$$\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} \in V_p \times V_p \quad (\text{Produkttraum})$$

besitzt die Eigenschaften:

$$1. \text{ Bilinearität: } \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = (a_i \underline{\underline{\varepsilon}}_i) \otimes (b_j \underline{\underline{\varepsilon}}_j) = a_i b_j (\underline{\underline{\varepsilon}}_i \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}_j)$$

- 2. lineare Abbildung:

$$(\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}}) \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{c}}) \in V_p$$

(2.18)

• (2.18) legt nahe:

Satz:

Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produkt-
raumes $V_p \times V_p$, der durch die Basisformen
 $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, i, j = 1, 2, 3\}$ aufgespannt wird:

(2.19)

$$\underline{I} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

... Entwicklung von \underline{I} nach Basis!

$$[\text{vgl. } \underline{a} = a_i \underline{e}_i]$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: (2.16): } T_{ij} &= \underline{e}_i \cdot \underline{I} \underline{e}_j \stackrel{(2.19)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{e}_j \\ &= T_{kl} \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{ik}} \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{lj}} \end{aligned}$$

$$= T_{ij} \checkmark$$

NB: $\boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} \stackrel{(2.19)}{=} a_i b_j} \quad (2.20)$