3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

3.1. Kinematik

a) materielle und räumliche Koordinaten

Kontinuum im Referenzzustand

$\underline{\xi}$ … materielle oder Lagrangesche Koordinaten, indiziert Punkt $P = P(\underline{\xi})$ des Kontinuums

$\xrightarrow[\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)]{\text{Bewegung}}$

Ortsvektor $\underline{x}$ bzw. x_1, x_2, x_3

… räumliche oder Eulersche Koordinaten von P bzgl. festes räumliches KOS

• Felder:

$\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{\xi}, t)$ … materielle Darstellung $\longrightarrow$ elast. Körper

$\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{x}, t)$ … räumliche " $\longrightarrow$ Flüssigkeiten

• i.f. immer räumliche Darstellung!

b) Konvektionsformel

• beliebiges Feld: $\varphi(\underline{x}, t) = \varphi(\underline{x}(\underline{\xi}, t), t) = \varphi(\underline{\xi}, t) \quad (3.1)$

… „physikal. Konvention" für Funktionen

• Zeitableitungen:

(i) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t)$ ... <u>lokale</u> Zeitableitung ($\hat{=}$ zeitl. Änderung am Ort $\underline{x}$)

(ii) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{\xi},t) \equiv \frac{d}{dt}\varphi(\underline{x},t)} \quad (3.2)$$ ... <u>materielle</u> oder <u>substantielle</u> Zeitableitung ($\hat{=}$ zeitl. Änderung im Punkt P, im bewegten Flüssigkeitsvolumen)

$$= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t) + [\nabla_i \varphi(\underline{x},t)]\underbrace{\frac{\partial x_i(\underline{\xi},t)}{\partial t}}_{v_i(\underline{\xi},t) = v_i(\underline{x},t)}$$

$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x},t)$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\text{lokale Zeitableitg}} + \underbrace{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varphi}_{\text{Konvektionsterm / " ableitung}}} \quad (3.3)$$ ... Konvektionsformel

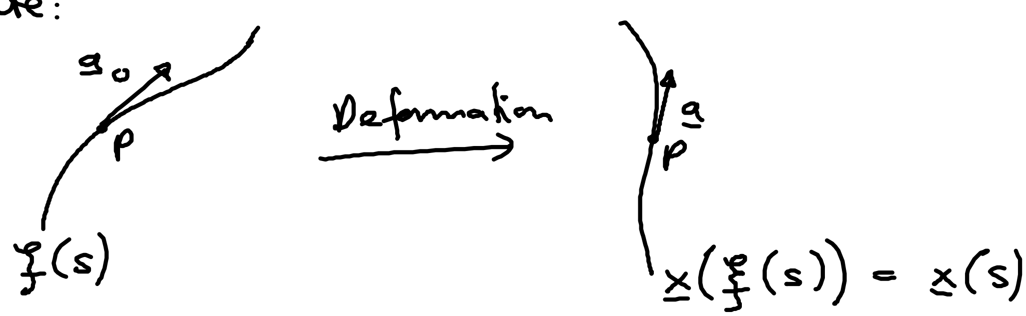
Bsp: $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\underbrace{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varphi}_{\text{lokale zeitliche Änderg aufgrd Strömung}}$

c) Deformationsrate

• Ziel: Variable, die Scherung / Dilatation Kompression von Flüssigkeiten erfaßt

(i) Geschwindigkeitsgradient:

• Betrachte:



Tangentialvektor:

$$\underline{a}_0 = \frac{\partial}{\partial s}\xi(s) \longrightarrow \underline{a} = \frac{\partial}{\partial s}x(\xi(s)) \quad \text{mit } a_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial s} \quad (3.4)$$

- Führe ein:

$$\boxed{\underline{\underline{F}} \text{ mit } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}} \quad (3.5)$$

.... Jacobische Matrix

also (3.4) $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{a} = \underline{\underline{F}}\,\underline{a}_0}$ (3.6)

- Betrachte:

$$\frac{d}{dt}\underline{a} \overset{(3.6)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{F}}\right)\underline{a}_0$$

$$\overset{(3.6)}{=} \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}\underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}}\underline{a} \qquad \text{mit } (\underline{\underline{F}}^{-1})_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \quad \text{(o.B.)}$$

in Komponenten:

$$L_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right)\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}x_i\right)}_{v_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla_j v_i$$

also: $\boxed{\begin{array}{c}\frac{d}{dt}\underline{a} = \underline{\underline{L}}\,\underline{a} \\ \text{mit } L_{ij} = \nabla_j v_i\end{array}}$

... Geschwindigsgradient

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^t) \\ \quad = \quad \underline{\underline{A}} \quad + \quad \underline{\underline{W}}\end{array}} \quad (3.8)$$

$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j\right)$ ... Deformationsrate = Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j\right)$ ... Drehgeschwindigkeitstensor

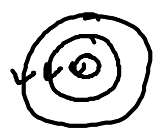
(ii) <u>Bedeutung von $\underline{\underline{W}}$</u>:

- W ist antisymmetrisch: $\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix}$

- Führe ein:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v} \\ \text{mit}\quad &\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\nabla_j v_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk} \end{aligned}} \qquad (3.9)$$

... Drehvektor

Vortex in Flüssigkeit 

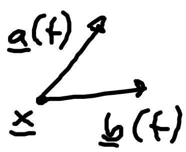
denn es gilt: $\boxed{\underline{\underline{W}}\,\underline{a} = \underline{\omega} \times \underline{a}}$

... Drehung von $\underline{a}$
[$\underline{a}$ wird im Vortex gedreht]

[Beweis: $(\underline{\omega} \times \underline{a})_i = \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\, a_k = -\underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\frac{1}{2}\varepsilon_{jmn}}_{-(\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})} W_{mn}\, a_k$

$= \frac{1}{2}\left(W_{ik} - W_{ki}\right) a_k = W_{ik}\, a_k$ qed]

(iii) <u>Deformationsrate</u>:

- Betrachte: 

- zeitliche Änderung von $\underline{a} \cdot \underline{b}$?

$$\frac{d}{dt}(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underbrace{\dot{\underline{a}}}_{\dot{} \,\hat{=}\, \frac{d}{dt}} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \dot{\underline{b}} \overset{(3.7)}{=} \underline{\underline{L}}\,\underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{\underline{L}}\,\underline{b}$$

$\underline{\underline{L}}^t$

$$= \underline{a} \cdot \left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t\right) \underline{b}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) \overset{(3.8)}{=} 2\,\underline{a}\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{b}} \qquad (3.11)$$

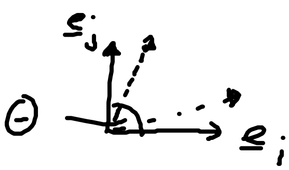
• Interpretation von $\underline{\underline{A}}$: mit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... Koordinatenbasis

(1) $\underline{a} = \underline{b} = a\,\underline{e}_i \xrightarrow{(3.11)} 2a\dot{a} = 2a^2 A_{ii}$ mit $A_{ii} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_i$

$$\longrightarrow \boxed{A_{ii} = \frac{\dot{a}}{a}}$$

... relative Dehngeschwindigkeit von Längen entlang $\underline{e}_i$

(2) $\underline{a} = \underline{e}_i$, $\underline{b} = \underline{e}_j \xrightarrow{(3.11)} \frac{d}{dt}\left(|\underline{e}_i||\underline{e}_j|\cos\Theta\right)\Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = 2A_{ij}$



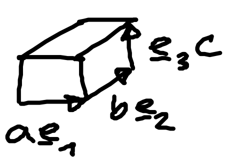
$$-\sin\Theta\,\dot{\Theta}\Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{A_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{\Theta}} \qquad \begin{matrix}(3.13)\\ i\neq j\end{matrix}$$

... halbe Änderungsgeschwindigkeit rechter Winkel = Scherrate

(3) Kompressionsrate:

Quadervolumen: $V = abc$



Betrachte: $\frac{\dot{V}}{V} = \frac{(abc)^{\cdot}}{abc} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 + \nabla_3 v_3$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\dot{V}}{V} = \operatorname{div}\underline{v} = \operatorname{Sp}\underline{\underline{A}}} \qquad (3.14)$$

... Kompressionsrate / -geschw.
Dilations " "

3.2. Einordnung: hydrodynam. Variable

- Ges: Bewegungsgleichungen für Kontinua, insbes. zähe Flüssigkeiten
- jedes System:

  aufgebaut durch Atome: Kollisionen mit mittlerer stoßfreier Zeit τ_c

  $\longrightarrow$ lokales thermodynamisches GG ≙ Thermodynamik lokal anwendbar

  [vgl. Stat. Phys. I: Folgerungen aus Boltzmann-Gl.]
- hier: Dynamik von Kontinua auf Längenskala $\gg$ Atomabstände

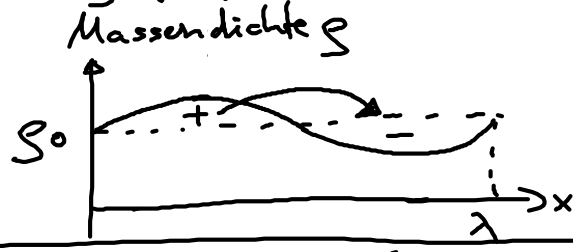
  " " " Zeiten $\tau_H \gg \tau_c$

  also: langsame kollektive Dynamik

  $\longrightarrow$ hydrodynamische Variable:

  (1) Erhaltungsgrößen: Masse, Impuls, Energie

  Grund:

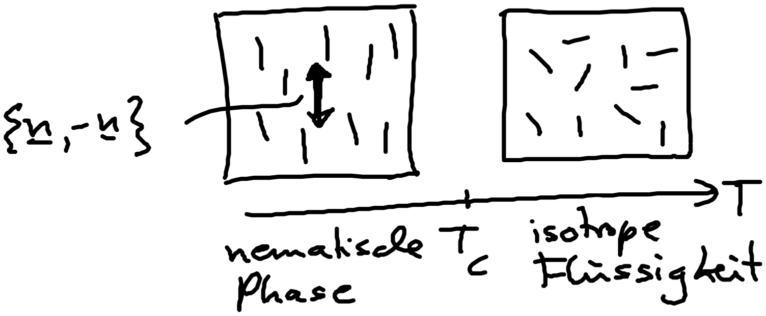


  Ausgleich der Inhomogenitäten auf Zeiten $\tau \longrightarrow \infty$ für $\lambda \longrightarrow \infty$

  ... hydrodynam. Variable!

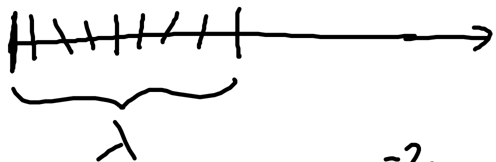
  (2) Variable, die gebrochene kontinuierliche Symmetrien beschreiben („broken continuous-symmetry variables")

  Bsp: Flüssigkristalle



$\underline{n}$ ... Direktor

elastische Deformation



kostet Energie $\sim \lambda^{-2}$

$\boxed{\text{Relaxationszeit } \tau \sim \lambda^2 \to \infty \text{ für } \lambda \to \infty}$

Grund: Rotation vom gesamten System kostet keine Energie