d) Impulsbilanz

- kanonische Form:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v}) + \mathrm{div}\,\underbrace{(\rho\underline{v}\otimes\underline{v}-\underline{T})}_{\text{Impulsstrom-dichte}} = \underbrace{\rho\,\underline{b}}_{\text{Quellterm}}} \quad (3.21)$$

NB: Kontinuitätsgleichung für $\rho\underline{v}$ & Quellterm!

- Umschreibung:

mit $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j) = [\ldots] = \rho\frac{d}{dt}v_i$

folgt aus (3.21)

$$\boxed{\rho\frac{d\underline{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = \mathrm{div}\,\underline{T} + \rho\,\underline{b}} \quad (3.22)$$

3.5 Einschub: Symmetrie des Spannungstensors

- Gesamt-Drehimpuls:

$$\underline{L} = \int_V (\underbrace{\underline{x}\times\rho\underline{v}}_{\text{Bahn-Dreh-impuls}} + \underline{\ell})\,d^3x \quad (3.23)$$

$\uparrow$ Eigendrehimpulsdichte ausgedehnte Teilchen: $\underline{\ell} = \underline{\Theta}\,\underline{\omega}$

- Drehimpulsbilanz:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \int_V \Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\underline{x}\times\rho\underline{v})}_{\underset{\dot{\underline{x}}=\underline{v}}{=}\ \underline{x}\times\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})} + \frac{\partial\underline{\ell}}{\partial t}\Big]d^3x$$

$$= -\oint_{\partial V} \underbrace{[(\underline{x}\times\rho\underline{v})\otimes\underline{v} + \underline{\ell}\otimes\underline{v}]}_{\substack{\text{Drehimpulsstromdichte}\\ \text{[konvektiver Anteil]}}}\cdot d\underline{f} + \underbrace{\int_V \underbrace{(\underline{x}\times\rho\underline{b})}_{\substack{\text{Volumen-}\\ \text{kräfte}}}\, d^3x + \oint_{\partial V} \underbrace{\underline{x}\times\underline{\underline{T}}}_{\substack{\text{Oberflächen-}\\ \text{kraft}}}\cdot d\underline{f}}_{\text{Drehmomente}} \quad (3.24)$$

$$\xrightarrow[\text{bel. Volumen}]{\text{Gauss \&}} \quad \underline{\underline{x}\times\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})} + \frac{\partial\underline{\ell}}{\partial t} = \underline{-\underline{x}\times \mathrm{div}(\rho\underline{v}\otimes\underline{v})} - \mathrm{div}(\underline{\ell}\otimes\underline{v}) + \underbrace{\underline{x}\times(\rho\underline{b}+\mathrm{div}\underline{\underline{T}})}_{=0,\text{ wegen }(3.21)} + \underline{T}^* \quad (3.25)$$

mit $\boxed{T_i^* = -\varepsilon_{ijk}T_{jk}}$ (3.26) … antisymmetrischer Anteil von $\underline{\underline{T}}$, dualer Tensor zu $\underline{\underline{T}}$

[Beweis:

(i) $[\mathrm{div}(\underline{x}\times\underline{\underline{T}})]_i = \nabla_l(\varepsilon_{ijk}x_jT_{kl}) = \varepsilon_{ijk}\delta_{jl}T_{kl} + \varepsilon_{ijk}x_j\nabla_lT_{kl}$

$$= \varepsilon_{ijk}T_{kj} + \varepsilon_{ijk}x_j\nabla_lT_{kl}$$

$$= T_i^* + (\underline{x}\times\mathrm{div}\underline{\underline{T}})_i$$

(ii) $\mathrm{div}(\underline{x}\times\rho\underline{v}\otimes\underline{v}) \underset{v_iv_j=v_jv_i}{\overset{\text{wie in (i)}}{=}} \underline{x}\times\mathrm{div}(\rho\underline{v}\otimes\underline{v})$

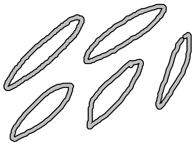
$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\underline{\ell}}{\partial t} + \mathrm{div}(\underline{\ell}\otimes\underline{v}) = \underline{T}^*} \quad (3.27)$$

- Diskussion:

a) Punktteilchen: $\underline{\ell}=0 \longrightarrow \underline{T}^* = \underline{0} \longrightarrow \boxed{\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^t}$ (3.28)

b) ausgedehnte Teilchen:
unkoordinierte Rotation $\longrightarrow \underline{\ell}\approx\underline{0} \longrightarrow \boxed{\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^t}$ (3.29)

c) Flüssigkristalle:



koordinierte Rotation $\longrightarrow \underline{\ell}\neq\underline{0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\underline{T}^*\neq 0\\ \underline{\underline{T}}\neq\underline{\underline{T}}^t\end{array}}$ (3.30)

Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten!) $\longrightarrow$

3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik

- Gesamtenergie:

$$E = \int_V \rho(\underline{x},t)\, e(\underline{x},t)\, d^3x \qquad (3.31)$$

$$= \int_V \rho(\underline{x},t)\left[\frac{1}{2}\underline{v}^2(\underline{x},t) + u(\underline{x},t)\right] d^3x$$

e … spezifische Gesamtenergie / G.energie pro Masseneinheit

u … " innere Energie / innere Energie " "

- 1. Hauptsatz: [vgl: $dU = đQ + đW_{mech}$]

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho e)\, d^3x - \int_{\partial V} q\cdot df + \int_V \rho r_w\, d^3x + \underbrace{\int_V \rho\underline{b}\cdot\underline{v}\, d^3x + \int_{\partial V}\underline{v}\cdot\underline{\underline{T}}\, df}_{\text{mechan. Leistung von Volumen- und Oberflächenkräften}} \qquad (3.32)$$

$$= -\int_{\partial V} \underbrace{\rho e \underline{v}}_{\text{Energiestromdichte (konvektiver Anteil)}} \cdot df$$

q … Wärmestromdichte

r_w … Wärmeerzeugung pro Masseneinheit

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{V zugeführte Wärme pro Zeiteinheit}}$$

- Umformung:

$$\int_{\partial V} \underbrace{\underline{v}\cdot\underline{\underline{T}}\, df}_{v_i T_{ij} df_j} \overset{\text{Gauss}}{=} \int_V \underbrace{\mathrm{div}\left(\underline{\underline{T}}^t\underline{v}\right)}_{\partial_j\left[(\underline{\underline{T}}^t)_{ji} v_i\right]} d^3x$$

$$\xrightarrow{(3.32)} \text{kanonische Form}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{\underline{v}^2}{2} + u\right)\right] + \mathrm{div}\Big[\underbrace{\underbrace{\rho\left(\frac{\underline{v}^2}{2}+u\right)\underline{v}}_{\text{konvektiv}} - \underbrace{\underline{\underline{T}}^t\underline{v}}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q}_{\text{Wärmestrom}}}_{\text{Energiestromdichte!}}\Big] = \rho\left(\underline{v}\cdot\underline{b} + r_w\right)} \qquad (3.33)$$

NB: Kontinuitätsgleichung für ρe und Quellterm!

- Umschreibung:

(i) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underset{\uparrow}{e}) + \operatorname{div}(\rho e \underline{v}) \overset{(3.17)}{=} [\ldots] = \rho \frac{de}{dt}$$

ϕ in (3.17)

$$= \underline{\rho \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt}} + \rho \frac{du}{dt}$$

(ii) $$\operatorname{div}[\underline{\underline{T}}^t \underline{v}] = \nabla_i (T_{ji} v_j) = \underline{\underline{v} \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{T}}} + \underbrace{T_{ji} \nabla_i v_j}$$

$+ \rho \underline{v} \cdot \underline{b}$

$[\underline{v} \cdot (3.22)]$

$$\overset{\text{mit}}{(3.7)} \; T^t_{ij} L_{ji} = \operatorname{Sp}(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}})$$

$(3.33) \longrightarrow$

$$\boxed{\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} u\right) = \underbrace{\operatorname{Sp}(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}})}_{\substack{\text{mechan.}\\ \text{Leistung}\\ \text{der inneren}\\ \text{Kräfte}}} - \underbrace{\operatorname{div} \underline{q}}_{\substack{\text{Wärme-}\\ \text{fluß}}} + \underbrace{\rho r_w}_{\substack{\text{Wärme-}\\ \text{quelle}}}} \quad (3.34)$$

3.7 2. Hauptsatz der Thermodynamik

- hilft bei Aussagen über Materialgesetze für $\underline{\underline{T}}$, $\underline{q}$
- homogenes System: $dS \geq \frac{dQ}{T}$

  $>$ irreversible

  $=$ reversible Prozesse

- Kontinuum: $S = \int_V \rho s \, d^3x$

  s... spezifische Entropie / Entropie pro Masseneinheit

- 2. HS:

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) \, d^3x \geq \underbrace{-\int_{\partial V} \Big(\underbrace{\rho s \underline{v}}_{\text{konvektiv}} + \underbrace{\frac{\underline{q}}{T}}_{\substack{\text{von Wärme}\\ \text{strom}}} \Big)}_{\substack{\text{Entropiestrom-}\\ \text{dichte}}} \cdot d\underline{f} + \int_V \underbrace{\frac{\rho r_w}{T}}_{\text{Quellen}} \, d^3x \quad (3.35)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}\left(\rho s \underline{v} + \frac{q}{T}\right) - \frac{\rho r_w}{T} \geq 0 \\ T\sigma &= T\rho\frac{ds}{dt} + \mathrm{div}\, q - \frac{1}{T} q \cdot \underline{\nabla} T - \rho r_w \geq 0 \end{aligned}} \quad (3.36)$$

bzw mit (3.17)

... Clausius-Duhem-Gl.

Deutung: (i) reversible Prozesse: $\sigma = 0$

(ii) irreversible " $\sigma > 0$

σ ... Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit für dissipative Vorgänge im System

- Umschreibung:

(i) Kontrollgröße $T \longrightarrow$ führe ein: $\boxed{f = u - Ts}$ (3.37)

... spezifische freie Energie

(ii) verwende Erhaltungssätze:

mit 1. HS (3.34) $\left[\rho r_w - \mathrm{div}\, q = \rho \frac{du}{dt} - \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right]$ in (3.36)

$$T\sigma = -\rho\left(\frac{du}{dt} - T\frac{ds}{dt}\right) + \mathrm{Sp}(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}) - \frac{1}{T} q \cdot \underline{\nabla} T \geq 0$$

$$\longrightarrow \boxed{T\sigma = -\rho\left(\frac{df}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) + \mathrm{Sp}(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}} - \frac{1}{T} q \cdot \underline{\nabla} T \geq 0} \quad (3.38)$$

mit $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} - s\frac{dT}{dt} - T\frac{ds}{dt}$