

### 3.8 Die Newtonsche Flüssigkeit

#### c) Anwendung auf Newtonsche Flüssigkeit

Zeitumkehr:

$$\rightarrow \begin{cases} T'_{ij} = \eta_{ijkl} A_{kl} \\ q_i = -\kappa_{ij} \nabla_j T \end{cases} \quad (3.49)$$

(i) Wärmeleitfähigkeitstensor  $\underline{\kappa}$ :

Symmetrie  $\rightarrow$  
$$\begin{cases} \underline{\kappa} = \kappa \underline{1} \\ \underline{q} = -\underline{\kappa} \underline{\nabla} T \end{cases} \quad (3.50)$$

NB: 
$$\underline{\kappa} \geq 0 \quad (3.51)$$

(ii) Zähigkeitstensor  $\eta_{ijkl}$ : (4. Stufe)

(1) Permutationssymmetrie:

$$(3.52) \begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} \quad , \text{ wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \text{ \& } A_{kl} = A_{lk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} \end{cases}$$

wegen Dissipationsfunktion

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \text{Sp} \underline{I}' \underline{A} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \end{aligned} \quad (3.53)$$

2w... pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Reibungswärme

$$\underline{I}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{A}} \quad (3.54)$$

(2) Rotationsymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta_{i'j'k'l'} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l} \quad , \quad \underline{R} \in \text{SO}(3) \quad (3.55)$$

(1) & (2)  $\xrightarrow{2.3.}$

$$\tau_{ijkl} = \eta' \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.56)$$

$$\underline{\underline{\mathbb{I}'}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbb{A}}} + \eta' \underline{\underline{\mathbb{1}}} \text{Sp} \underline{\underline{\mathbb{A}}}$$

...  $\underline{\underline{\mathbb{I}'}}$  für Newtonsche Flüssigkeit

• Umschreibung:

$$\underline{\underline{\mathbb{I}'}} = 2\eta \left( \underline{\underline{\mathbb{A}}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbb{1}}} \text{Sp} \underline{\underline{\mathbb{A}}} \right) + \left( \eta' + \frac{2}{3} \eta \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}} \text{Sp} \underline{\underline{\mathbb{A}}} \quad (3.57)$$

Scherung!
Kompression

$\eta$  ... Scher viskosität
 $\eta' + \frac{2}{3} \eta$  ... Volumenviskosität

Wähle: reine Scherung ( $\text{Sp} \underline{\underline{\mathbb{A}}} = 0$ ) } und  $\text{TG} = \text{Sp} \underline{\underline{\mathbb{I}'}} \underline{\underline{\mathbb{A}}} \geq 0$   
 reine Kompression ( $\underline{\underline{\mathbb{A}}} \sim \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ ) }

$$\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3} \eta \geq 0 \quad (3.58)$$

Beweis: Übungen

### 3.9 Newtonsche Flüssigkeit:

#### Zusammenstellung der Gleichungen

• s. Folie

### 3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

• NS-Gleichungen:

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{v}} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{\underline{v}} + (\eta + \eta') \nabla (\text{div} \underline{\underline{v}}) + \rho \underline{\underline{g}} \quad (3.67)$$

NB: mit Massebilanz & Materialgesetz  $p(\rho)$ : ( $T = \text{konstant}$ )

# 4 Gleichungen für $\underline{v}$ , $\rho$

• Verhalten unter Zeitumkehr:

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow -t \\ \underline{v} \rightarrow -\underline{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \nabla^2 \underline{v} \rightarrow -\eta \nabla^2 \underline{v}$$

bricht Zeitumkehrinvarianz

also: „Dissipation“ von Energie  $\leftrightarrow$  Irreversibilität

• Nichtlinearität:  $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \rightarrow$  Turbulenz

• ideale Flüssigkeit:  $\eta = \eta' = 0 \rightarrow$  Eulergleichungen

Anwendung: Dynamik von Gasen

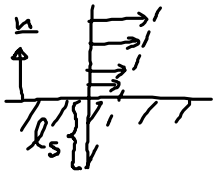
• Flüssigkeiten:  $\text{div } \underline{v} \approx 0$  (in guter Näherung incompressibel)

• Randbedingungen:

(i) haftend:  $\underline{v}|_{\text{Rand}} = 0$  (3.63)

„glatte“, „homogene“ Oberflächen

(ii) mit „Slip“-Länge  $l_s$ :



$$\left. \begin{array}{l} \text{Normalgeschw: } v_n = 0 \\ \text{Tangentialgeschw: } (v_t - l_s \underline{n} \cdot \nabla v_t) \Big|_{\text{Rand}} = 0 \end{array} \right\} (3.64)$$

Realisierung: strukturierte Oberflächen (auf Nanometerskala)

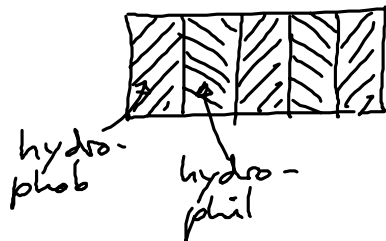
- mit Polymeren beschichtet

Nadeln "

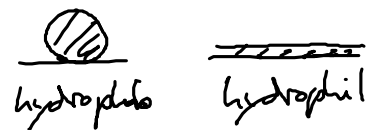
[Choi, Kim PRL 96, 06601 (2006)]

Silicennadeln auf Silikonfläche] s. Folie

- chemisch strukturiert  $\rightarrow$  Muster



von der Seite:



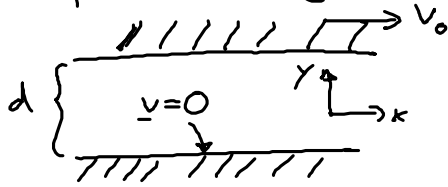
- Rauigkeit

$\rightarrow l_s = \dots 100 \text{ nm} \dots 50 \mu\text{m}$

wichtig für: Mikro-/Nanofluidik

Biologie  
porösen Medien

- einfache Sheargeometrie: Couette Strömung = Strömung, erzeugt durch bewegte Begrenzung



$$b=0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad [v_0=0 \rightarrow \text{kein Fluß}]$$

Annahme:  $\underline{v} = v(y) \underline{e}_x$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \underline{v}_i \nabla v = 0 \text{ \& \ } \text{div } \underline{v} = 0 \xrightarrow{(3.52)} \eta \nabla^2 \underline{v} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(y) = 0 \rightarrow \boxed{v(y) = v_0 \frac{y}{d}} \quad (3.55)$$

Spannungstensor:  $\underline{T} = 2\eta \underline{A}$

$\rightarrow$  Kraft pro Flächeneinheit:

$$\boxed{T_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{v_0}{d}} \quad (3.56)$$

Kraft-  
richtung

Flächen-  
normale

... Maßvorschrift für  
Shearviskosität  $\eta$ !

- Poiseuille-Strömung: s. Übungen

• Viskositäten  $\eta, \eta'$ : Einheit:  $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Gesch.}} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$

$$= 10 \frac{\text{g}}{\text{cm s}} = 10 \text{ P(oise)}$$

Werte für  $\eta$ : s. Folie