3.11 Die Reynoldszahl

- NS-Gl.: <u>keine</u> intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)

  $\longrightarrow$ NS-Gln. sind skaleninvariant (gültig auf Längen $\geq 10\,\mathrm{nm}$)

  $\hat{=}$ Physik ist auf allen Skalen die gleiche.

  $\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip: Auto $\longleftrightarrow$ Windkanal

- NS-Gln.: mit $\operatorname{div} \underline{v} = 0$, $\underline{b} = 0$

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \qquad (3.67)$$

mit a … charakt. Länge

v_0 … " Geschw.

Δp … " Druckabfall

$\longrightarrow$ Skalierung auf einheitenlose Größen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{a/v_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{Re\left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\underline{v}}\cdot\tilde{\underline{\nabla}}\,\tilde{\underline{v}}\right) = -\frac{1}{2}\,Eu\,Re\,\tilde{\underline{\nabla}}\tilde{p} + \tilde{\underline{\nabla}}^2\tilde{\underline{v}}} \qquad (3.68)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Reynoldszahl: } Re = \dfrac{\rho a v_0}{\eta} = \dfrac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}} = \dfrac{\rho v_0^2/a}{\eta v_0/a^2} \\[2ex] \text{Eulerzahl: } Eu = \dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \dfrac{\text{Druckkräfte}}{\text{Trägheitskräfte}} \end{array}} \qquad (3.69)$$

$\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip

$\boxed{\text{Systeme mit gleicher } Re \text{ \& } Eu \text{ verhalten sich gleich}}$ (3.70)

- Einteilung:

  $Re < 1$: laminar, schleichender Fluß;

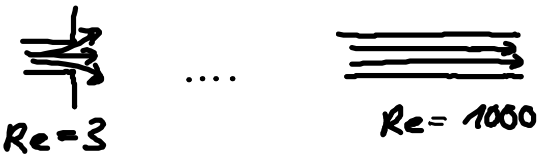
  Reibung dominiert ($\rho \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v} < \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}$)

  vernachlässige $\rho \frac{dv}{dt}$ auf Zeiten $\frac{a}{v_0}$ für $Re \ll 1$!

Bsp: - Strömung um Kugel
- Tropfen geschert

$Re > 1$: Turbulenz, Trägheit dominiert
Bsp: Kaffeetasse

- Übergang zu Turbulenz: real, Geometrie abhängig



- Bsp: Schwimmende Organismen:
  30 m Wal, $v_0 = 10 \frac{m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^8$
  1 μm Bakterie, $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$! s. Folie

- <u>kritische viskose Kraft:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \eta \left[\frac{kg}{m\,s}\right] \\ \rho \left[\frac{kg}{m^3}\right] \end{array}\right\} \boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}} \quad (3.71) \Longrightarrow \frac{\text{äußere Kraft } F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, & \text{laminar} \\ \gg 1, & \text{Turbulenz} \end{cases}$$

konsistent mit Re?

$$\frac{\text{Reibungskraft} \sim \eta a v_0}{\eta^2/\rho} = Re \gtrless \frac{\text{Trägheitskraft} \sim \rho v^2 a^2}{\eta^2/\rho} = Re^2 \quad \text{für } Re \lessgtr 1$$

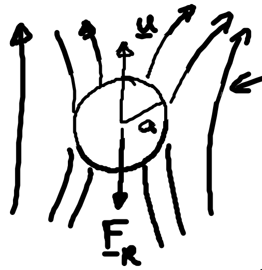
Bsp: Tabelle s. Folie
H_2O: $F < F_{krit} \approx 1\,nN \longrightarrow$ sehr zähe Flüssigkeit in Mikro-/Nanowelt

insbesondere: Zelle: $F \approx 1\,pN$
$\longrightarrow$ dominiert durch Reibung

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

- konstantes T: nur NS-Gln, keine Energiebilanz nötig!
- Motivation:
  (1) hydrodynam. Mode der NS-Gln. = Störungen um homogenen GG-Zustand

(2) Stokes Reibung: $\underline{F}_R = -6\pi\eta a \underline{u}$



mit Kugel mitbewegtes statisches Geschw.profil!

$\longleftrightarrow$ Gültigkeit?

- **Zerlegungssatz** für Vektorfeld $\underline{v}$: o.B.

$\underline{v}(\underline{x},t)$ ist bestimmt durch seine Wirbel rot $\underline{v}$, seine Quellen div $\underline{v}$ und ein Anteil $\underline{v}_R$ mit div $\underline{v}_R$ = rot $\underline{v}_R = 0$, um die Randbedingungen zu erfüllen.

a) **Wirbel:**

- Voraussetzung: $\left.\begin{array}{l} Re \ll 1 \longleftrightarrow \text{vernachlässige } \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \\ \varrho = \varrho_0 + \delta\varrho \approx \varrho_0 \end{array}\right\}$ linearisiere in $\underline{v}$ & ϱ

mit rot (3.62) & rot $\underline{\nabla}\ldots = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\varrho_0}\underline{\nabla}^2\right)\text{rot}\,\underline{v} = \text{rot}\,\underline{b}} \quad (3.72)$$

… Diffusionsgleichung für Wirbel/Vortizität

$\frac{\eta}{\varrho_0}$ … Diffusionskonstante für Wirbel

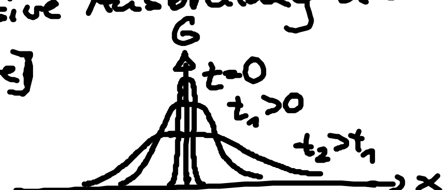
- Greensche Fkt. $\quad \text{rot}\,\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)$

… bei $t=0$ initiierter "pkt.förmiger" Wirbel

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{\text{Lsg. von (3.72)}} \quad \boxed{G(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{1}{\left(4\pi\frac{\eta}{\varrho_0}t\right)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\eta/\varrho_0\, t}}} \quad (3.73)$$

… diffusive Ausbreitung des Pkt. Wirbels

[Gaußsche Glockenkurve]



$$\left.\begin{array}{l} \text{mit } \lim\limits_{t\to 0} G(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0) \\ \text{Normierung: } \int G(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = 1, \quad t \geq 0 \end{array}\right\} \quad (3.74)$$

· Folgerung:

mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels
= mittleres Abstandsquadrat der Verwirbelung von $\underline{x}_0$

$$\boxed{\langle (\underline{x}-\underline{x}_0)^2 \rangle = \int (\underline{x}-\underline{x}_0)^2\, G(\underline{x}-\underline{x}_0, t)\, d^3x = 6\,\frac{\eta}{\rho_0}\, t} \qquad (3.75)$$

2 x Raumdimension

Diffusions-konst.

charakt. für diffusive Ausbreitung

Beweis: Übungen

hydrodynam. Zeitskala: mit l_H ... charakt. Länge

$$\longrightarrow \quad \boxed{\tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\rho_0}} \qquad (3.76)$$

Bsp: $l_H^2 = (1\,\mu m)^2$, $\eta = 10^{-3}\,\frac{kg}{ms}$, $\rho_0 = 1\,\frac{g}{cm^3} = 10^3\,\frac{kg}{m^3}$

$$\longrightarrow \quad \tau_H = 10^{-7}\,s\,!$$