3.13 Hydrodynamische Moden

• erster Satz von linearisierten Bew.gln.

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \, \mathrm{div}\, \underline{v} = 0 \qquad (3.88)$$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \underline{\nabla}\, \mathrm{div}\, \underline{v} \qquad (3.89)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \, \mathrm{div}\, \underline{v} + \kappa \underline{\nabla}^2 T \qquad (3.90)$$

b) Longitudinalmoden:

• wichtige thermodynamische Relationen: s. Folie

• Umformungen für Bewgln.:

(1) in Impulsbilanz: $$\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \underline{\nabla} \delta\rho + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{-\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho}\ (3.99)} \underline{\nabla} \delta T \qquad (3.104)$$

(2) $$\underline{\nabla}^2 \underline{v}_l = \underline{\nabla}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_l - \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \underline{v}_l}_{0} = \underline{\nabla}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_l \qquad (3.105)$$

(3) in Energiebilanz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \mathrm{div}\, \underline{v}_l = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \rho}}_{\overset{(3.100)}{=} \left(\cancel{\frac{p}{\rho^2}} + T \frac{\partial s}{\partial \rho}\right)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho}_{(-\rho)\, \mathrm{div}\, \underline{v}_l} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{= c_v\ (3.95)} \frac{\partial}{\partial t} \delta T + \cancel{\frac{p}{\rho} \mathrm{div}\, \underline{v}_l}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \mathrm{div}\, \underline{v}_l = -T\rho \frac{\partial s}{\partial \rho} \mathrm{div}\, \underline{v}_l + c_v \frac{\partial}{\partial t} \delta T \qquad (3.106)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\xrightarrow{(3.88)} && \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho\, \mathrm{div}\, \underline{v}_l = 0 && (3.107)\\
&\xrightarrow[\&\ (3.105)]{(3.89)\text{ mit }(3.104)} && \frac{\partial \underline{v}_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \underline{\nabla} \delta\rho - \rho \frac{\partial s}{\partial \rho} \underline{\nabla} \delta T - \frac{2\eta + \eta'}{\rho} \underline{\nabla}^2 \underline{v}_l = 0 && (3.108)\\
&\xrightarrow[(3.106)]{(3.90)\text{ mit}} && \frac{\partial}{\partial t} \delta T - \frac{T\rho}{c_v} \frac{\partial s}{\partial \rho} \mathrm{div}\, \underline{v}_l - \frac{\kappa}{\rho c_v} \underline{\nabla}^2 \delta T = 0 && (3.109)
\end{aligned}}$$

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplung $\delta\rho$, $\underline{v}_l$, δT

- Modenanalyse:
  Ansatz: ebene Welle

$$\left.\begin{aligned} \delta\rho(\underline{x},t) &= \delta\rho(\underline{k},\xi)\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}} \\ \underline{v}_l(\underline{x},t) &= v_l(\underline{k},\xi)\,\frac{\underline{k}}{k}\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}} \quad , \quad \mathrm{rot}\,\underline{v}_l = 0\,! \\ \delta T(\underline{x},t) &= \delta T(\underline{k},\xi)\, e^{-\ \cdots\cdots} \end{aligned}\right\} \quad (3.110)$$

- mit (3.110) in (3.107 - 3.109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & ik\rho & 0 \\ ik\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & -\xi + k^2\frac{2\eta+\eta'}{\rho} & -ik\rho\frac{\partial s}{\partial \rho} \\ 0 & -ik\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} & -\xi + \frac{\varkappa}{\rho c_v}k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}\ldots\ \text{dynamische Matrix}} \begin{bmatrix} \delta\rho(\underline{k},\xi) \\ v_l(\underline{k},\xi) \\ \delta T(\underline{k},\xi) \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.111)$$

nichttriviale Lsg: $\boxed{\mathrm{Det}\,\mathcal{D} = 0 \longrightarrow \xi = \xi(k)}$

... Dispersionsrelation

etwas kompliziert $\longrightarrow$ in Schritten

- <u>ohne Dissipation</u>: $\varkappa = \eta = \eta' = 0 \longrightarrow$ keine Dämpfung!

  (1) Schallwellen:

$$(3.111) \longrightarrow \left.\begin{aligned} \delta T &= -\frac{ik}{\xi}\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} v_L \\ \delta\rho &= \frac{ik}{\xi}\rho v_l \end{aligned}\right\} \text{in mittlere Gl. von (3.111)}$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \big(\underbrace{\xi^2 + c^2k^2}_{=0}\big)\, v_l = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi_{3/4} = \pm ick \quad , \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho\varkappa_s}}} \qquad (3.112)$$

  - Schallwellen mit Geschw. c: $\quad v_l \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EV von } \mathcal{D}}}{\hat{=}} e^{i(\mp ckt + \underline{k}\cdot\underline{x})}$
    [nach rechts bzw. links
    laufend]
  - $c \sim \frac{1}{\sqrt{\varkappa_s}}$ mit $\varkappa_s$... <u>isentrope</u> Kompressibilität

  (2) weiterer EV von $\mathcal{D}$:

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ 0 \\ \delta T \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in (3.111)}} \boxed{\xi_5 = 0} \quad (3.113)$$

$$\frac{1}{\rho}ik\Big(\frac{\partial p}{\partial \rho}\delta\rho - \underbrace{\rho^2\frac{\partial s}{\partial \rho}}_{\overset{=}{(3.99)}\ \frac{\partial p}{\partial T}}\delta T\Big) \sim dp = 0$$

$\longrightarrow$ statische Mode ($\xi_5 = 0$) mit $dp = 0$

- mit Dissipation:

(2) diffusive Wärmemode:

Ansatz: $\xi_s = \underbrace{D_T k^2}_{\text{Dämpfg} \sim k^2!}$ in $\mathrm{Det}\, \underline{\underline{D}} = 0$

& Terme führender Ordnung in k $[O(k^4)]$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\left(D_T - \frac{\kappa}{\rho c_p}\right) k^4 = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\xi = D_T k^2 \text{ mit } D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p}} \quad (3.114)$$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitung
  D_T: Wärmediffusionskoeffizient
- c_p statt c_v durch Kopplung an $\delta\rho$ bzw $\mathrm{div}\, \underline{v}_L$

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfung:

Ansatz: $\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2$ in $\mathrm{Det}\, \underline{\underline{D}} = 0$

& Terme führender Ordnung in k $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{aligned} \xi_{3/4} &= \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2 \\ \text{mit } c &= \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_s}} \\ \underbrace{\Gamma}_{\text{Dämpfung aufgrund}} &= \underbrace{D_T\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)}_{\text{Wärmediffusion}} + \underbrace{\frac{2\eta + \eta'}{\rho}}_{\text{Volumenviskosität}} \end{aligned}}$$

4. Stokes-Gleichungen

- wichtig für Welt der kleinen Reynoldszahlen
- " für Strömungsfelder auf Mikro-/Nanometerskala

  insbesondere Mikro-/Nanofluidik!

- Voraussetzungen:

$Re = \frac{\rho a v_0}{\eta} \ll 1 \xrightarrow{(3.68)}$ vernachlässige $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$

$\longrightarrow$ " $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$

auf Zeiten $t \gg \tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\rho}$

$\rightarrow$ stationäres Geschw.feld auf Länge l_H

[s. Kap. 3.11]

div $\underline{v} = 0$ $\longrightarrow$ inkompressible Flüssigkeit

$\longrightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned} \underline{0} &= -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \; (+ \varrho \underline{b}) \\ 0 &= \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned}} \quad (4.1)$$

... Stokes-Gln.

auch: „creeping-flow" Gleichungen