4.1 Extremalprinzip

- wichtiges Prinzip in Physik!

  Bsp: $\delta S = \delta \int L\, dt = 0$

  $\longrightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.

- hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = TG$ für $T =$ konstant:

$$\boxed{W \overset{(3.43)}{=} \int Sp\, \underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\, d^3x \underset{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underline{\underline{A}}}{=} 2\eta \int Sp\, \underline{\underline{A}}^2 d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2\, d^3x} \quad (4.2)$$

- Extremalprinzip: unter Nebenbedingung $\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$$\boxed{\delta\left(W - 2\int_V p \operatorname{div}\underline{v}\, d^3x\right) = 0}$$

Druck $p \cong$ Lagrangeparameter

$\longleftrightarrow$

$0 = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}$

Randbedingung:

1. $\underline{v} = 0$ ... haftend
2. $T_{ij} n_j \big|_{\partial V} = 0$

„Oberfläche ist kräftefrei!"

stationäre Strömungsprofile stellen sich so ein, daß W ein Extremum annimmt!

4.2 Biharmonische Gleichung

- Herleitung:

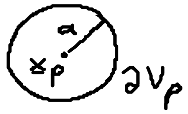
  $\operatorname{div}\left(\underline{0} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}\right) \xrightarrow{\operatorname{div}\underline{v} = 0} \boxed{\underline{\nabla}^2 p = 0}$ (4.4a)

  $\underline{\nabla}^2 \left(\quad " \quad " \quad \right) \xrightarrow{(4.4a)} \boxed{\underline{\nabla}^2 \underline{\nabla}^2 \underline{v} = 0}$ (4.4b)

NB: separate Gln. für $\underline{v}$ und p!

· **Hilfssatz:**

Geometrie:



Kugel

$$\boxed{\text{Oberflächenintegral: } \underline{v}(\underline{x}) \text{ löse Stokes-Gln. (4.1)} \qquad \frac{1}{4\pi a^2}\oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x})\, df = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p)} \quad (4.5)$$

Ableitung nach $\underline{x}_p$

· Beweis: verwendet Gl. (4.46)

(1) Taylor $\xrightarrow[\underline{x}-\underline{x}_p]{\Delta \underline{x}_p =}$ $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta\underline{x}_p \cdot \underline{\nabla}_p \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2}(\Delta\underline{x}_p \otimes \Delta\underline{x}_p) \cdot (\underline{\nabla}_p \otimes \underline{\nabla}_p)\underline{v}(\underline{x}_p)$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} \text{"}(\Delta\underline{x}_p)^n \cdot \underline{\nabla}_p^n\text{"}\ \underline{v}(\underline{x}_p)$$

(2) $\frac{1}{4\pi a^2}\int \underline{v}(\underline{x})\, df \longrightarrow$

(i) $\int (\Delta\underline{x}_p)^n df = 0$ $\quad$ n ungerade

(ii) $\underbrace{\int (\Delta\underline{x}_p \otimes \Delta\underline{x}_p)\, df}_{}$ $= \frac{4\pi}{3} a^4 \underline{1}$

denn: $= c\,\underline{1}$ wegen Isotropie der Oberfläche, keine Richtung ausgezeichnet

$\xrightarrow{Sp(\ldots)}$ $3c = a^2 \int_{\partial V_p} df = 4\pi a^4$

(iii) $\int (\underbrace{\Delta\underline{x}_p \otimes \Delta\underline{x}_p \otimes \ldots}_{n\text{-mal}})\, df \sim \underline{1}^{n/2}$ $\quad$ in (1)

$n \geq 4$ $\quad$ Isotropie

$$\downarrow$$

$$\ldots \underline{\nabla}_p^2 \underline{\nabla}_p^2 \ldots \underline{v}(\underline{x}_p) \overset{(4.46)}{=} 0$$

(1) & (2) $\longrightarrow$ (4.5)

4.3 Oseen-Tensor

· (4.1) $\equiv$ lineare Dgl. in $\underline{v}$ und p $\longrightarrow$ Methode der Greenschen Funktion (Superpositionsprinzip!)

$\longrightarrow$ Lsg. von (4.1) für vorgegebenes $\rho^b(\underline{x})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \int d^3x' \; \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\, \underline{\rho}^b(\underline{x}') \\ p(\underline{x}) &= \int d^3x' \; \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot \underline{\rho}^b(\underline{x}') \end{aligned}} \quad (4.6)$$

mit $\left.\begin{aligned} &\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') \ldots \text{Oseen-Tensor} \\ &\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \ldots \text{Druck-Vektor} \end{aligned}\right\}$ Greensche Funktionen

NB: (i) $\underline{\underline{O}}$ ... Tensor 2. Stufe!

(ii) $\underline{g}$ ... Vektor

• Bestimmungsgln. für $\underline{\underline{O}}$ und $\underline{g}$:

(4.6) in (4.1)

$$\longrightarrow \left\{\begin{aligned} 0 &= \int d^3x' \left\{ -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot \underline{\rho}^b(\underline{x}')\right] + \eta \underline{\nabla}^2 \left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right]\right\} + \underline{\rho}^b(\underline{x}) \\ 0 &= \int d^3x' \; \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right] \end{aligned}\right.$$

$$\xrightarrow[= \underline{e}\,\delta(\underline{x}')]{\underline{\rho}^b(\underline{x}')} \left\{\begin{aligned} 0 &= -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}) \cdot \underline{e}\right] + \eta \underline{\nabla}^2 \left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\underline{e}\right] + \underline{e}\,\delta(\underline{x}) \\ 0 &= \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\underline{e}\right] \end{aligned}\right.$$

$$\xrightarrow[\underline{e} = \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]{\underline{e} \text{ beliebig}} \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \otimes \underline{g}(\underline{x}) - \eta \underline{\nabla}^2 \underline{\underline{O}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{1}}\, \delta(\underline{x}) \\ \operatorname{div} \underline{\underline{O}}^t(\underline{x}) &= 0 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(4.7a) \\ &(4.7b) \end{aligned}$$

• Lösung: für unendliches Volumen, $\underline{v}\big|_{\partial V} = 0$

(i) Druck-Vektor $\underline{g}$:

$\operatorname{div}\left[(4.7a)^t\right]$ & (4.7b):

„möchte mit $\underline{\nabla}$ kontrahieren"

$$\longrightarrow \quad \underline{\nabla}^2 \underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.8)$$

Einschub: Elektrostatik: $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\underline{x})$ (4.9), $r = |\underline{x}|$

Greensche Fkt. der Poisson-Gl.

$\underline{\nabla}$ (4.9) & vgl. mit (4.8)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{x}}{r^3}} \quad (4.10)$$

... „Dipol"

Beweis: $\underline{\nabla} \frac{1}{r} = - \frac{1}{r^2} \underbrace{\underline{\nabla} r}$

$\hat{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{r}$

(ii) Oseen-Tensor $\underline{\underline{O}}$:

(4.10) in (4.7a)

$$\longrightarrow \quad -\frac{1}{4\pi} (\underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}) \frac{1}{r} - \eta \underline{\nabla}^2 \underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \underline{\underline{1}}\, \delta(\underline{x}) \qquad (4.11)$$

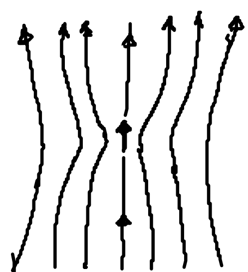
$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} \right)} \qquad (4.15)$$

... Oseen-Tensor

- Geschw. feld einer Punktquelle: $\rho \underline{b}(\underline{x}) = \underline{f}_0\, \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$

$$\xrightarrow{\text{in (4.6)}} \quad \boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{O}}(\underline{x} - \underline{x}_0)\, \underline{f}_0} \qquad (4.16)$$

... „Stokeslet"



$\underline{f}_0$

Anisotropie:

(i) $\underline{x} - \underline{x}_0 \parallel \underline{f}_0 \xrightarrow{(4.15)} \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{4\pi\eta r}$, $r = |\underline{x} - \underline{x}_0|$

(ii) $\underline{x} - \underline{x}_0 \perp \underline{f}_0 \xrightarrow{(4.15)} \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{8\pi\eta r}$

NB: allgemein: $\underline{v}(\underline{x}) \equiv$ Superposition von Stokeslets

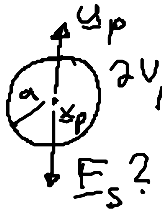
- wichtige Anwendung: hydrodynamische Wechselwirkungen (HW)

s. Kap. 6

4.4. Stokes Reibung

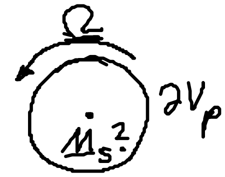
- 2 Standardsituationen:

(i) linear bewegte Kugel



Reibungskraft $\underline{F}_s$?

(ii) rotierende Kugel



Reibungsdrehmoment $\underline{M}_s$?

Berechne $\underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}} \longrightarrow \underline{F}_s,\ \underline{M}_s$

a) <u>Translation:</u>

- Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)}\ \underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0 \ , & r = |\underline{x}| \to \infty \\ \text{(ii)}\ \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_p \ , & \underline{x} \in \partial V_p \end{array}\right\} \quad (4.17)$$

- <u>1. Weg:</u> mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')$

Ansatz: Oberflächenkraftdichte von Kugel auf Flüssigkeit

$$\left. \varsigma\, \underline{b}(\underline{x}') \right|_{\underline{x}' \in \partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\, \underline{u}_p \quad (4.18)$$

... konstant auf ∂V_p !!