4.1 Extremalprinzip

- wichtiges Prinzip in Physik!

  Bsp: $\delta S = \delta \int L \, dt = 0$

  $\longrightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.

- hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = TG$ für $T =$ konstant:

$$\boxed{W \overset{(2.43)}{=} \int Sp\, \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{\Delta}}\, d^3x \overset{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underline{\underline{\Delta}}}{=} 2\eta \int Sp\, \underline{\underline{\Delta}}^2 d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2\, d^3x} \quad (4.2)$$

- Extremalprinzip: unter Nebenbedingung $\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$$\boxed{\delta\left(W - 2\int_V p \operatorname{div} \underline{v}\, d^3x\right) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v}}$$

Druck p = Lagrangeparameter

Randbedingung:

1. $\underline{v} = 0$ ... haftend
2. $T_{ij} n_j \big|_{\partial V} = 0$

„Oberfläche ist kräftefrei!"

$$\boxed{\text{stationäre Strömungsprofile stellen sich so ein, daß } W \text{ ein Extremum annimmt!}}$$

4.2 Biharmonische Gleichung

- Herleitung:

$$\operatorname{div}\left(\underline{0} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}\right) \xrightarrow{\operatorname{div} \underline{v} = 0} \boxed{\nabla^2 p = 0} \quad (4.4a)$$

$$\underline{\nabla}^2 \left(\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \right) \xrightarrow{(4.4a)} \boxed{\underline{\nabla}^2 \underline{\nabla}^2 \underline{v} = 0} \quad (4.4b)$$

NB: separate Gln. für $\underline{v}$ und p!

• **Hilfssatz:**

Geometrie:

Kugel

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Oberflächenintegral: } \underline{v}(\underline{x}) \text{ löse Stokes-Glm. (4.1)}\\ &\frac{1}{4\pi a^2}\oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x})\,df = \left(1+\frac{1}{6}a^2\underline{\nabla}_p^2\right)\underline{v}(\underline{x}_p)\end{aligned}} \quad (4.5)$$

Ableitung nach $\underline{x}_p$

• Beweis: verwendet Gl. (4.4b)

(1) Taylor $\xrightarrow[\underline{x}-\underline{x}_p]{\Delta \underline{x}_p =}$ $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta\underline{x}_p\cdot\underline{\nabla}_p\underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2}(\Delta\underline{x}_p\otimes\Delta\underline{x}_p)\cdot(\underline{\nabla}_p\otimes\underline{\nabla}_p)\underline{v}(\underline{x}_p)$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\,\text{“}(\Delta\underline{x}_p)^n\cdot\underline{\nabla}_p^n\text{”}\,\underline{v}(\underline{x}_p)$$

(2) $\frac{1}{4\pi a^2}\int \underline{v}(\underline{x})\,df \longrightarrow$

(i) $\int (\Delta\underline{x}_p)^n\,df = 0$ $\quad$ n ungerade

(ii) $\underbrace{\int (\Delta\underline{x}_p\otimes\Delta\underline{x}_p)\,df}_{\text{dann: } = c\,\underline{1}} = \frac{4\pi}{3}a^4\,\underline{1}$

wegen Isotropie der Oberfläche, keine Richtung ausgezeichnet

$\xrightarrow{Sp(\ldots)}$ $3c = a^2\int_{\partial V_p} df = 4\pi a^4$

(iii) $\int (\underbrace{\Delta\underline{x}_p\otimes\Delta\underline{x}_p\otimes\ldots}_{n\text{-mal}})\,df \sim \underline{1}^{n/2}$ $\quad$ in (1)

$n\geq 4$ $\quad$ Isotropie

$$\ldots\underline{\nabla}_p^2\,\underline{\nabla}_p^2\ldots\underline{v}(\underline{x}_p)\overset{(4.4a)}{=}0$$

(1) & (2) $\longrightarrow$ (4.5)

4.3 Oseen-Tensor

• (4.1) = lineare Dgl. in $\underline{v}$ und p $\longrightarrow$ Methode der Greenschen Funktion (Superpositionsprinzip!)

$\longrightarrow$ Lsg. von (4.1) für vorgegebenes $\underline{\rho}^b(\underline{x})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \int d^3x' \; \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,\underline{\rho}^b(\underline{x}') \\ p(\underline{x}) &= \int d^3x' \; \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot\underline{\rho}^b(\underline{x}') \end{aligned}} \qquad (4.6)$$

mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')$ ... Oseen-Tensor
$\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')$ ... Druck-Vektor $\Big\}$ Greensche Funktionen

N.B.: (i) $\underline{\underline{O}}$ ... Tensor 2. Stufe!
(ii) $\underline{g}$ ... Vektor

- Bestimmungsgln. für $\underline{\underline{O}}$ und $\underline{g}$:

(4.6) in (4.1)

$$\longrightarrow \begin{cases} 0 = \int d^3x' \left\{ -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right] + \eta\,\underline{\nabla}^2\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right]\right\} + \underline{\rho}^b(\underline{x}) \\ 0 = \int d^3x' \; \mathrm{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[=\underline{e}\,\delta(\underline{x}')]{\underline{\rho}^b(\underline{x}')} \begin{cases} 0 = -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x})\cdot\underline{e}\right] + \eta\,\underline{\nabla}^2\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\,\underline{e}\right] + \underline{e}\,\delta(\underline{x}) \\ 0 = \mathrm{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\,\underline{e}\right] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\underline{e}=\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3]{\underline{e}\text{ beliebig}} \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla}\otimes\underline{g}(\underline{x}) - \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{\underline{O}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{1}}\,\delta(\underline{x}) \\ \mathrm{div}\,\underline{\underline{O}}^t(\underline{x}) &= 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(4.7a) \\ &(4.7b) \end{aligned}$$

- Lösung für unendliches Volumen, $\underline{v}\big|_{\partial V} = 0$

(i) Druck-Vektor $\underline{g}$:

$\mathrm{div}\left[(4.7a)^t\right]$ & (4.7b):

, mochte mit $\underline{\nabla}$ kontrahieren

$$\longrightarrow \quad \underline{\nabla}^2\underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\,\delta(\underline{x}) \qquad (4.8)$$

Einschub: Elektrostatik: $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\underline{x}) \quad (4.9), \quad r = |\underline{x}|$

Greensche Fkt. der Poisson-Gl.

$\underline{\nabla}$ (4.9) & vgl. mit (4.8)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\,\underline{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\underline{x}}{r^3}} \qquad (4.10)$$

... „Dipol“

Beweis: $\underline{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\underbrace{\underline{\nabla} r}_{\hat{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{r}}$

(ii) Oseen-Tensor $\underline{\underline{O}}$:

(4.10) in (4.7a)

$$\longrightarrow \quad -\frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\otimes\underline{\nabla})\frac{1}{r} - \eta\nabla^2\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \underline{\underline{1}}\,\delta(\underline{x}) \qquad (4.11)$$

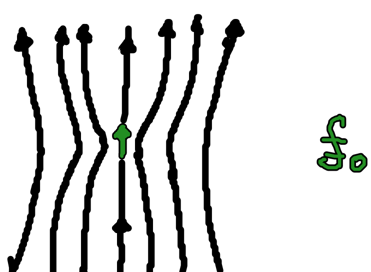
$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)} \qquad (4.15)$$

... Oseen-Tensor

- Geschw. feld einer Punktquelle: $\rho\underline{b}(\underline{x}) = \underline{f}_0\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

$\xrightarrow{\text{in (4.6)}}$ $\boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\underline{f}_0}$ (4.16)

... „Stokeslet"



Anisotropie:

(i) $\underline{x}-\underline{x}_0 \parallel \underline{f}_0 \xrightarrow{(4.15)} \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{4\pi\eta r}$, $r = |\underline{x}-\underline{x}_0|$

(ii) $\underline{x}-\underline{x}_0 \perp \underline{f}_0 \xrightarrow{(4.15)} \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{8\pi\eta r}$

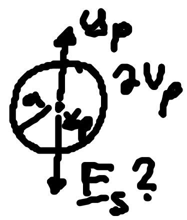
NB: allgemein: $\underline{v}(\underline{x})$ = Superposition von Stokeslets

- wichtige Anwendung: hydrodynamische Wechselwirkungen (HW) s. Kap. 6

4.4. Stokes Reibung

• 2 Standardsituationen:

(i) linear bewegte Kugel



Reibungskraft $\underline{F}_s$?

(ii) rotierende Kugel

Reibungsdrehmoment $\underline{M}_s$?

Berechne $\underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\Pi} \longrightarrow \underline{F}_s,\ \underline{M}_s$

a) <u>Translation:</u>

• Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)}\ \underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0, & r = |\underline{x}| \longrightarrow \infty \\ \text{(ii)}\ \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_p, & \underline{x} \in \partial V_p \end{array}\right\} \quad (4.17)$$

• <u>1. Weg:</u> mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')$

Ansatz: Oberflächenkraftdichte von Kugel auf Flüssigkeit

$$S\, \underline{b}(\underline{x}')\Big|_{\underline{x}' \in \partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\, \underline{u}_p \quad (4.18)$$

... konstant auf ∂V_p !!