4.4 Stokes Reibung

a) Translation

- Randbedingungen …
- <u>1. Weg</u>: $\quad \varsigma\,\underline{b}(\underline{x}')\big|_{\underline{x}'\in\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\,\underline{u}_p \qquad (4.18)$

$$\longrightarrow \quad \underline{v}(\underline{x}) \overset{(4.6)}{=} \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underbrace{\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{\substack{\text{Lsg. der Stokes Gln.}\\ \text{für } \underline{x}-\underline{x}'\neq 0}} \underline{u}_p \, df' \qquad (4.19)$$

mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-(\underline{x}_p+\Delta\underline{x}_p))$

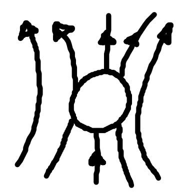
& Hilfssatz (4.5)

$$\underline{v}(\underline{x}) = c\,\left(1+\frac{1}{6}a^2\nabla_p^2\right)\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p$$

$$\text{RB (4.17)(ii)} \xrightarrow{\text{o.B.}} c = 6\pi\eta a \qquad (4.20)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \underline{\underline{S}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p \\ \text{mit } \underline{\underline{S}}(\underline{x}) &= 6\pi\eta a\left(1+\frac{1}{6}a^2\nabla^2\right)\underline{\underline{O}}(\underline{x}) \\ &\overset{\text{o.B.}}{=} \frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\underline{\underline{1}}+\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\underline{\underline{1}}-3\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)\end{aligned}} \qquad (4.21)$$

NB: für $r \gg a$: $\quad \underline{v}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underbrace{6\pi\eta a\,\underline{u}_p}_{\underline{F} = -\underline{F}_s\,!}$ s.u.


!!!

… Stokeslet!

- 2 Weg: löse (4.1) direkt $\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x})$ [s. Übungen]

• **Stokessche Reibungskraft:**

1. Weg: $$F_s = -\int_{\partial V_p} \rho\, \underline{b}(x)\, df \overset{(4.18)}{=} -c\, u_p \underbrace{\int_{\partial V_p} \frac{df}{4\pi a^2}}_{=1}$$

actio-reactio

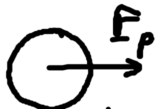
$$\longrightarrow \boxed{F_s = -6\pi \eta a\, u_p} \quad (4.22)$$

... gültig für $t \gg \tau_H = \frac{a^2}{6\eta/\rho}$

2. Weg: $\underline{v}(x),\ p(x) \longrightarrow \underline{\Pi} = -p\,\underline{1} + 2\eta\,\underline{\Lambda}$

$$\longrightarrow F_s = \int_{\partial V_p} \Pi\, df$$ [etwas Arbeit]

• **Brownsche Zeitskala** τ_B:



$F_p\ ,\ t \geq 0$

$u_p(t=0) = 0$

Bewgl. $m\frac{du_p}{dt} = F_p + F_s \longrightarrow m\dot{u}_p + \gamma u_p = F_p \quad (4.23) \qquad \gamma = 6\pi\eta a$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{aligned} &u_p = \frac{F_p}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right) \\ &\text{mit } \tau_m = \frac{m}{\gamma} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\rho_p}{\rho} \end{aligned}}$$

$m = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_p$

$\gamma = 6\pi\eta a$

vgl. $\tau_H = \frac{1}{6} a^2 \frac{\rho}{\eta}$

Bsp: $\rho_p = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $a = 1\mu m$, $\eta = 10^{-3} \frac{kg}{ms} \longrightarrow \tau_m = \frac{2}{9} \cdot 10^{-6} s$

$\longrightarrow$ Impulsrelaxation vernachlässigbar auf Zeitskala

$$\boxed{\tau_B \gg \tau_H \gtrsim \tau_m} \quad (4.25)$$

dann gilt: $$\boxed{u_p(t) = \frac{1}{\gamma} F_p(t)} \quad (4.26)$$

NB: (4.23) nicht konsistent, weil auf Zeiten $\tau_m = \tau_H$ keine stationäre Strömung existiert $\longrightarrow$ $\gamma_\infty \underline{u}_p$ ~~nicht~~ gültig

$$\longrightarrow \text{besser: } \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\gamma(t-t')}_{\text{Gedächtnisfunktion}} \underline{u}_p(t')\,dt' \underset{\text{salität}}{\overset{\text{Kau-}}{=}} \int_{-\infty} \underbrace{\gamma(t-t')}_{=0,\ t'>t!} \underline{u}_p(t')\,dt'$$

$$\xrightarrow[\text{Faltungssatz}]{FT} \underbrace{\gamma(\omega)}_{\text{frequenzabhängiger Reibungskoeffizient}} \underline{u}_p(\omega) = \underline{F}_p(\omega)$$

$$\underline{u}_p(t) = \underline{u}_p(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \underline{F}_p(\omega)$$

b) **Rotation:**

- Randbed.: (i) $\underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0\ ,\ r \longrightarrow \infty$

  (ii) $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p)\ ,\quad \underline{x} \in \partial V_p$

- 1. Weg: $\underline{s}^{\underline{b}}(\underline{x})\Big|_{\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\, \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p)$

  $\vdots$ Integral: $\underline{v}(\underline{x}) = \frac{c}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')[\underline{\Omega} \times (\underline{x}' - \underline{x}_p)]$

  RB: (ii) $\longrightarrow c = 12\pi\eta a$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p) \sim \frac{1}{r^2}\ ,\quad r = |\underline{x} - \underline{x}_p|} \quad (4.27)$$

- 2. Weg: s. Übungen

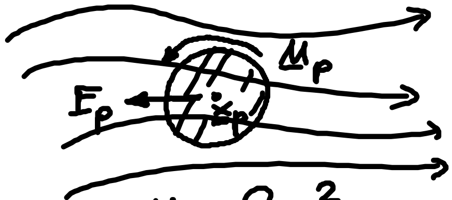
- Stokessches Drehmoment:

$$\underline{M}_s = -\int_{\partial V_p} [(\underline{x} - \underline{x}_p) \times \underline{s}^{\underline{b}}(\underline{x})]\, df$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\underline{M}_s = -8\pi\eta a^3 \underline{\Omega}} \quad (4.28)$$

4.5 Faxén-Theorem

- tiefere Einsicht, nur für kugelförmige Teilchen
- Problemstellung:



$\underline{v}_0(\underline{x})$ ... Lsg. der Stokes Gln. ohne Teilchen!

$\underline{u}_p, \underline{\Omega}_p$?

- Geschw. der Teilchenoberfläche: $\underline{x} \in \partial V_p$

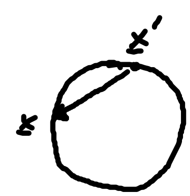
$$\underbrace{\underline{u}_p + \underline{\Omega}_p \times (\underline{x}-\underline{x}_p)}_{(i)} = \underbrace{\underbrace{\underline{v}_0(\underline{x})}_{(iv)} + \underbrace{\int_{\partial V_p} df'\, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{(ii),(iii)}\, \varrho \underline{b}(\underline{x}')}_{\text{o.B.d.A., } \varrho \underline{b}(\underline{x}') \text{ stellt sich so ein, daß (4.29) gilt}} \qquad (4.29)$$

$\varrho \underline{b}(\underline{x}')$: Oberflächenkraftdichte von Teilchen auf Flüssigkeit

Betrachte: $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} (4.29)\, df$

$\longrightarrow$ (i) $\int_{\partial V_p} (\underline{x}-\underline{x}_p)\, df = 0!$ (4.30)

(ii) $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} df\, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') \underset{\text{Isotropie}}{=} c\, \underline{\underline{1}}$, $\underline{x}, \underline{x}' \in \partial V_p$ (4.31)



$$\xrightarrow[(4.15)]{Sp\,(4.31)} \quad 3c = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{4}{8\pi\eta}\int_{\partial V_p}\frac{df}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \underset{\underline{x}'=z\text{-Achse}}{\overset{\text{Kugel-koord.}}{=}} \frac{1}{2\pi\eta a}$$

$\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)$

$$\longrightarrow \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} df\, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') = c\,\underline{\underline{1}} = \frac{1}{6\pi\eta a} \qquad (4.32)$$

(iii) $\frac{1}{6\pi\eta a}\int df'\, \varrho \underline{b}(\underline{x}') = \frac{1}{6\pi\eta a}\underline{F}_p$ (4.33)

(iv) $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} \underline{v}_0(\underline{x})\, df \underset{(4.5)}{=} \left(1 + \frac{1}{6}a^2\nabla_p^2\right)\underline{v}_0(\underline{x}_p)$ (4.34)

(i)–(iv) in (4.29)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{u}_p = \frac{1}{6\pi\eta a}\underline{F}_p + \left(1 + \frac{1}{6}a^2\nabla_p^2\right)\underline{v}_0(\underline{x}_p)} \qquad (4.35)$$

... Faxén-Theorem für Translation

(i) $\underline{v}_0(\underline{x}) = 0 \longrightarrow$ Stokes (4.22)

$\underline{F}_p = -\underline{F}_s$

(ii) kräftefreies Teilchen:

$$\underline{F}_p = 0 \longrightarrow \quad \underline{u}_p = \underline{v}_0(\underline{x}_p) + \underbrace{\frac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2 \, \underline{v}_0(\underline{x}_p)}_{\text{Spezialfall: } = 0 \text{ für lineares Geschw.profil in einer Spaltgeometrie}} \; !$$

(iii) wichtig für Störungstheorie für HW [s. Kap. 6] !!

- Faxén-Theorem für Rotation: $\left[\int (\underline{x} \times \underline{x}_p) \times (4.29) \, df \longrightarrow \ldots \right]$

$$\boxed{\underline{\Omega}_p = \frac{1}{8\pi\eta a^3} \underline{M}_p + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\nabla}_p \times \underline{v}_0(\underline{x}_p)}_{\text{Vortex in Strömung!}}} \quad (4.36)$$

(vgl. Gl. (3.9))