Anknüpfung an die letzte VL

aus Energie- und Drehimpulserhaltung beim 2-Körper-Problem mit Zentralkraft folgt $E_{rel} = \text{const}$, $\underline{L}_{rel} = \text{const}$

$\hookrightarrow$ Bewegung in der Ebene $\Rightarrow$ Polarkoordinaten

① $L_{rel} = (\underline{L}_{rel})_z = \mu r^2 \dot{\varphi}$ (μ reduzierte Masse)

② $E_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

Zentrifugalbarriere

$$\text{mit } \underbrace{V_{eff}(r)}_{\text{effektive Potential}} = V(r) + \frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}$$

Aufgabe:
Bestimmung von $r(t)$ und $\varphi(t)$

aus ①: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{rel}}{\mu r^2}$, aus ② $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} - V_{eff}(r))}$

Es muss also gelten: $E_{rel} \geq V_{eff}(r)$ für die erlaubten Abstände r!

(ansonsten: $E_{kin}^{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 = E_{rel} - V_{eff}(r)$)
aus ②

Mit Berechnung von $r(t)$ und $\varphi(t)$ betrachtet man das Problem als gelöst, da man dann die vollständige Bahnkurve $\underline{r}_{12}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ vorliegen hat

---

Lösung der DGL:

z.B. $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{rel} - V_{eff}(r)\right)}$

hat die Form $\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$

hier $y \to r$, $x \to t$, $f(x) = 1$

$$\hookrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{f(x')} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{rel} - V_{eff}(r')\right)}}$$

Durch Auswertung des Integrals auf der rechten Seite erhält man die Funktion $t(r) \xrightarrow[\text{Umkehrung}]{} r(t)$

$\varphi(t)$ erhält man aus der Gleichung $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{rel}}{\mu r^2}$

$$\Rightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = L_{rel} \int^{t} \frac{dt'}{\mu\left(r(t')\right)^2}$$

Manchmal betrachtet man auch direkt die Kombination der beiden DGL's für r und φ

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} \underset{\uparrow \atop ①,②}{=} \frac{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} - V_{eff}(r))}}{L_{rel}/\mu r^2}$$

diese DGL gilt für jede Zeit t!

$$d\varphi = \frac{L_{rel} \; dr}{\sqrt{2\mu(E_{rel} - V_{eff}(r))} \; r^2}$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L_{rel} \; dr'}{\sqrt{2\mu(E_{rel} - V_{eff}(r'))} \; r'^2} \Rightarrow \varphi(r)$$

„Bahngleichung"

$\Downarrow$ Umkehrung

$r(\varphi)$

d) Anwendung: Das Kepler-Problem

hier: $\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \underline{r}_{12}$ Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern

zugehöriges Gravitationspotential

$$V(r_{12}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$$

$r_{12} = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$

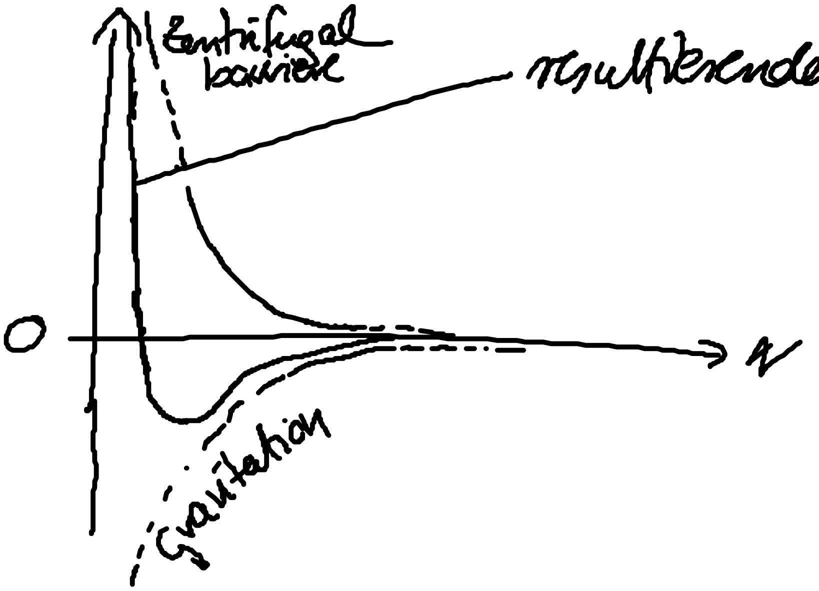
umschreiben: $V(r_{12}) = V(r)$

$$= -\gamma \frac{\mu M}{r}$$

mit r Abstand in der Ebene!

$\Rightarrow$ Effektives Potential:

$$V_{eff}(r) = -\gamma \frac{\mu M}{r} + \frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}$$

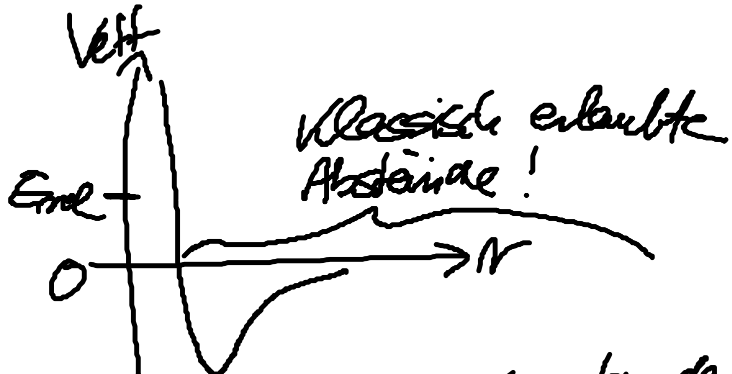


$\lim_{r \to 0} V_{eff}(r) = \infty$ weil $\frac{1}{r^2}$ schneller wächst als $1/r$!

Wir nehmen nun an

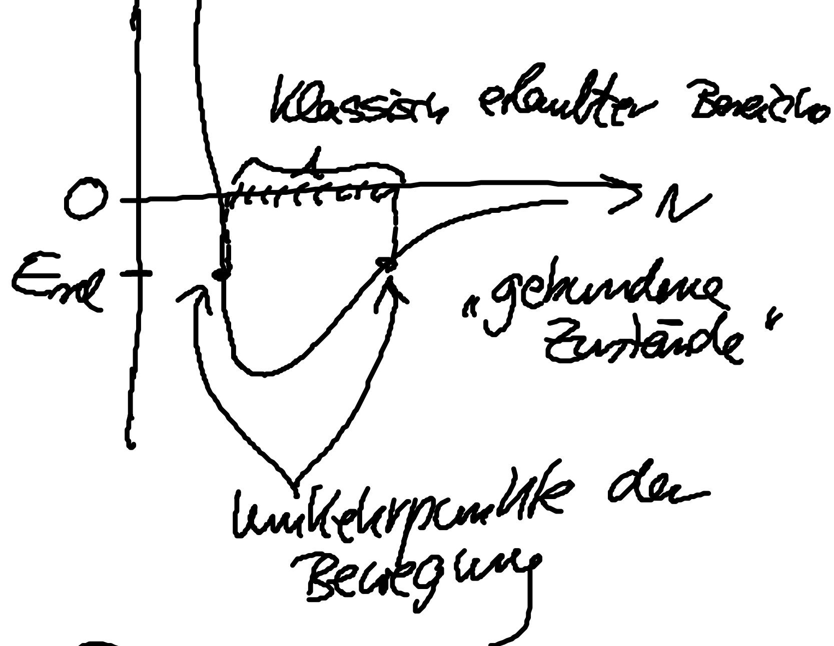
- $E_{rel} > 0$

Teilchen kann ins Unendliche gelangen



$\Rightarrow$ „Streuzustände" (ungebundene Bewegung)

• $E_{rel} < 0$



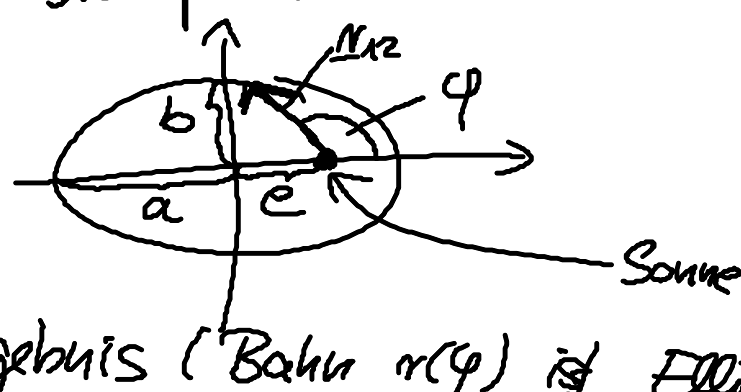
Wie sehen genau die Bewegungen in den beiden Fällen aus?

→ im Detail in der Übung

hier nur qualitativ

a) gebundene Bewegung ($E_{rel} < 0$)

Die Bahn $r(\varphi)$ ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne („Kraftzentrum") steht



$$a = -\frac{\gamma m M}{2E_{rel}}$$

$$b = \frac{L_{rel}}{\sqrt{-2mE_{rel}}}$$

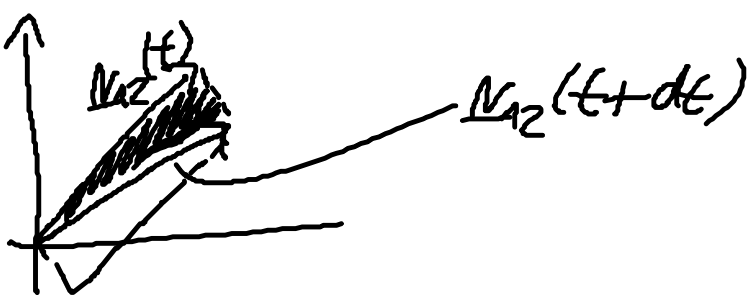
Dieses Ergebnis (Bahn $r(\varphi)$ ist Ellipse) entspricht genau dem 1. Keplerschen Gesetz der Planetenbewegung

2. Kepler'sches Gesetz

Der „Fahrstrahl" von der Sonne zum Planeten (d.h. der Vektor $\underline{r}_{12}(t)$) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen („Flächensatz")

Das ist Folge der Drehimpulserhaltung

dS : Fläche, die in der Bahnebene in der Zeit dt überstrichen wird



$$dS = |\underline{r}_{12}(t) \times \underline{r}_{12}(t+dt)| \cdot \frac{1}{2}$$

umschreiben so, daß L_{rel} vorkommt!

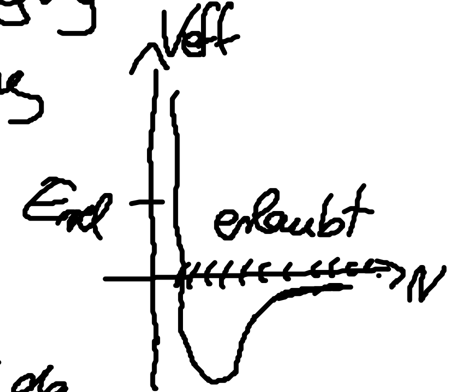
3. Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen!

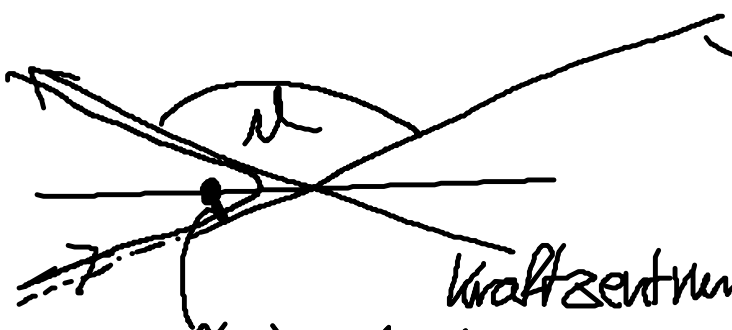
→ Übung

Zurück zur Diskussion der Planetenbewegung

ii) $E_{rel} > 0$: Ungebundene Bewegung



$\Rightarrow$ Bahn $r(\varphi)$ ist Hyperbel



Bahn, die das Teilchen ohne Kraftzentrum hätte

Kraftzentrum (Sonne)

Abstand d

Teilchenbahn wird um den Winkel ϑ abgelenkt

es gilt:

$$d = \frac{L_{rel}}{\sqrt{2m E_{rel}}} \quad , \quad \tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{\gamma}{2}\frac{M\mu}{d\, E_{rel}}$$

(Stoßparameter)

Dieser Fall ist auch sehr wichtig in der Atomphysik
→ Ablenkung geladener Teilchen bei der Streuung an positiv geladenen Atomkernen (Coulombpotential $\sim -\frac{1}{r}$)

e) Abschließende Bemerkungen zum Kepler-Problem

- Aus dem 2. Übungszettel wissen wir:
  Speziell für $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (α = const) gibt es außer Energie und Drehimpuls (und Impuls) noch eine weitere Erhaltungsgröße

Lenz'sche Vektor: $\underline{A} = (\underline{v} \times \underline{L}) + V(r)\,\underline{r}$

$\dot{\underline{A}} = 0$! gilt nur für $V(r) \sim \frac{\alpha}{r}$!

- Allgemeine Relativitätstheorie (→ Astrophysik) sehr
Es gibt Korrekturen zum Gravitationspotential für kleine Abstände.

I.5. Energie und Dissipation

(nicht speziell für 2-Körper-Problem, sondern allgemein!)

Frage: Was passiert mit der Gesamtenergie eines Systems in Anwesenheit dissipativer Kräfte?

Ausgangspunkt $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i$ ← Gesamtkraft auf Teilchen i

multipliziere mit $\dot{\underline{r}}_i$ und summiere über alle $i=1,\dots,N$ (wie in Kap I.3.)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \qquad (*)$$

Zerlege die Kräfte wie folgt:

$$\underline{F}_i = \underbrace{-\nabla_i V}_{\text{konservativer Anteil}} + \underline{F}_i^{\text{diss}} \leftarrow \text{dissipativer Anteil}$$

benutze:

$$\frac{d}{dt} m_i(\dot{\underline{r}}_i)^2 = m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i \cdot 2 \ , \quad \frac{d}{dt} V = \sum_{i=1}^{N} \nabla_i V \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

einsetzen in ⊛

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{\underline{r}}_i)^2}_{T} = -\frac{d}{dt} V + \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{diss} \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} T + \frac{d}{dt} V = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{diss} \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

mit $E = T + V$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} E = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{diss} \cdot \dot{\underline{r}}_i}$$

Zeitliche Änderung der Gesamtenergie E ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte

„Energiedissipation"

Gesamtenergie E ist nicht konstant!
(Verallgemeinerung der Aussage aus Kap. I. 3., wo wir uns mit rein konservativen Systemen beschäftigt hatten!)