

Anknüpfung an die letzte VL
 aus Energie- und Drehimpulserhaltung
 beim 2-Körper-Problem mit Zentralkraft
 folgt $E_{\text{rel}} = \text{const}$, $L_{\text{rel}} = \text{const}$

Bewegung in der Ebene \rightarrow Polarkoordinaten

① $L_{\text{rel}} = (L_{\text{rel}})_Z = \mu r^2 \dot{\varphi}$ (μ reduzierte Masse)

② $E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$ (Zentrifugalenergie $\frac{L_{\text{rel}}^2}{2\mu r^2}$)

Aufgabe: mit $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L_{\text{rel}}^2}{2\mu r^2}$ effektive Potential
 Bestimmung von $r(t)$ und $\varphi(t)$

aus ①: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{\text{rel}}}{\mu r^2}$, aus ② $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{\text{rel}} - V_{\text{eff}}(r))}$

Es muss also gelten: $E_{\text{rel}} \geq V_{\text{eff}}(r)$
 für die erlaubten Abstände r !

(ansatzm. aus ②: $E_{\text{kin}}^{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 = E_{\text{rel}} - V_{\text{eff}}(r)$)

Mit Berechnung von $r(t)$ und $\varphi(t)$ betrachtet man das Problem als gelöst, da man dann die vollständige Bahnkurve vorliegen hat

$$\underline{r}_2(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi(t) \\ r(t) \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung der DGL:

z.B. $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{\text{mech}} - V_{\text{eff}}(r))}$

hat die Form $\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$
 hier $y \rightarrow r, f(x) = 1$
 $x \rightarrow t$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{f(x')} = \int_{y_0}^y \frac{dy'}{g(y')}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t dt = t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{\text{mech}} - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

Durch Auswertung des Integrals auf der rechten Seite erhält man die Funktion $t(r) \Rightarrow r(t)$ (Umkehrung)

$\varphi(t)$ erhält man aus der Gleichung $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{\text{mech}}}{\mu r^2}$

$$\Rightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = L_{\text{mech}} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\mu (r(t'))^2}$$

Manchmal betrachtet man auch direkt die
 Kombination der beiden DGL's für r und φ

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{\text{red}} - k_{\text{eff}} r)}}{L_{\text{red}} / \mu r^2}$$

diese DGL
gilt für jede
Zeit t .

$$d\varphi = \frac{L_{\text{red}} dr}{\sqrt{2\mu (E_{\text{red}} - k_{\text{eff}} r)} r^2}$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{L_{\text{red}} dr'}{\sqrt{2\mu (E_{\text{red}} - k_{\text{eff}} r')} r'^2} \Rightarrow \varphi(r)$$

„Bahn Gleichung“ \Downarrow Umkehrung $r(\varphi)$

d) Anwendung: Das Kepler-Problem

hier: $\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \underline{r}_{12}$

Gravitationskraft
zwischen zwei
Himmelskörpern

zugehörige Gravitationspotentiale

$$V(r_{12}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$$

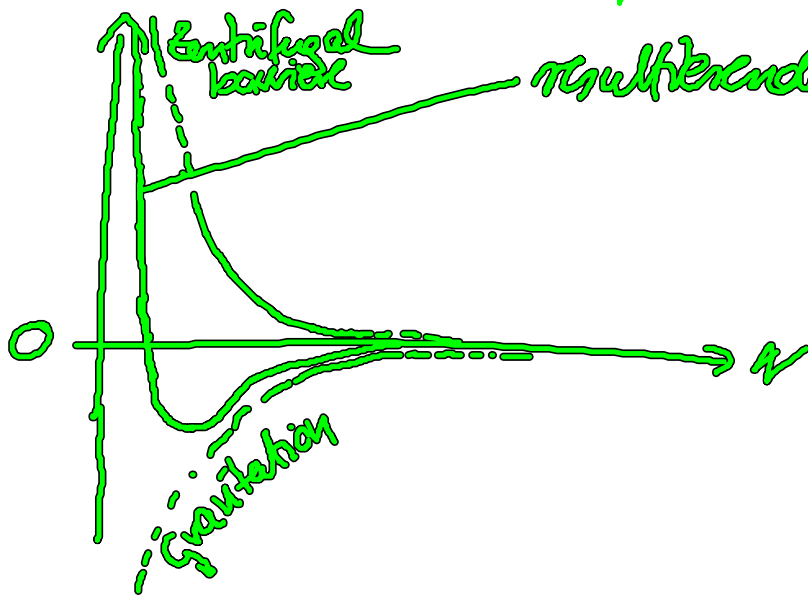
$$r_{12} = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$$

unschärfen: $V(r_{12}) = V(r)$
 $= -\gamma \frac{\mu M}{r}$

mit r Abstand
in der Ebene!

→ Effektives Potential.

$$V_{\text{eff}}(r) = -\gamma \frac{\mu M}{r} + \frac{L_{\text{rot}}^2}{2\mu r^2}$$



$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(r) = \infty$
 weil $\frac{1}{r^2}$
 schneller wächst
 als $\frac{1}{r}$!

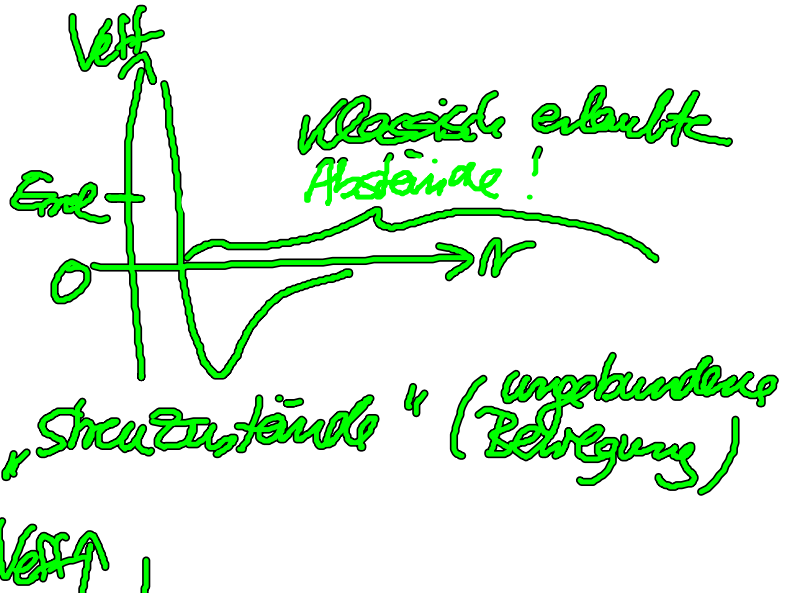
Wir nehmen nun an

- $E_{\text{rot}} > 0$

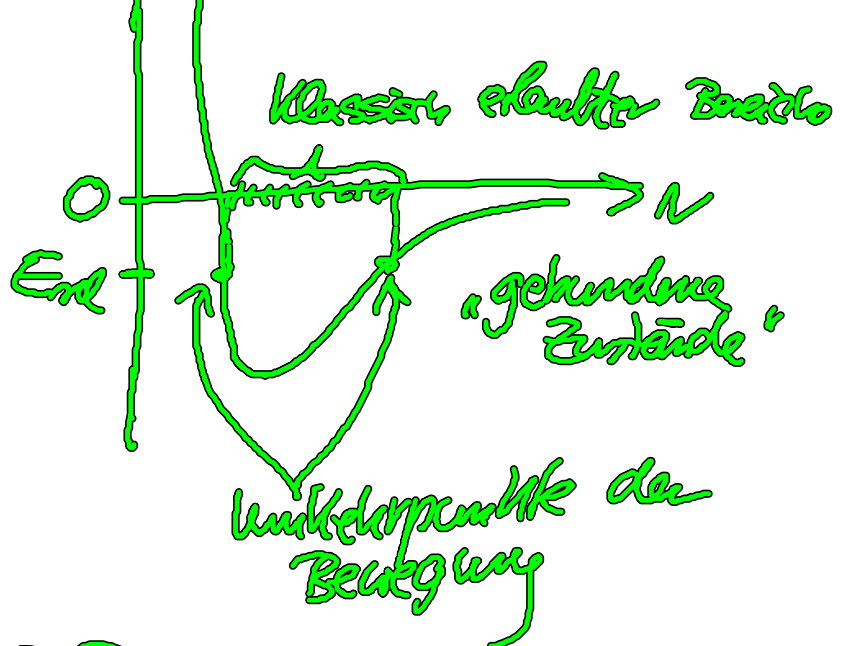
Teilchen kann ins Unendliche gelangen

→ „Streuzustände“ (ungebundene Bewegung)

V_{eff}



- $E_{\text{rel}} < 0$



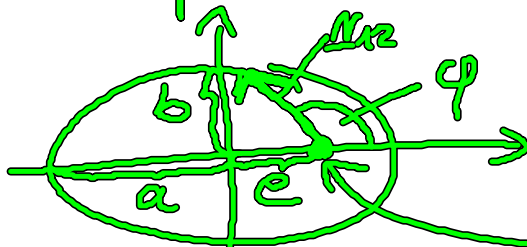
Wie sehen genau die Bewegungen in den beiden Fällen aus?

→ im Detail in der Übung

hier nur qualitativ

a) gebundene Bewegung ($E_{\text{rel}} < 0$)

Die Bahn $r(\varphi)$ ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne („Kraftzentrum“) steht



$$a = -\frac{\gamma m M}{2E_{\text{rel}}}$$

$$b = \frac{L_{\text{rel}}}{\sqrt{-2mE_{\text{rel}}}}$$

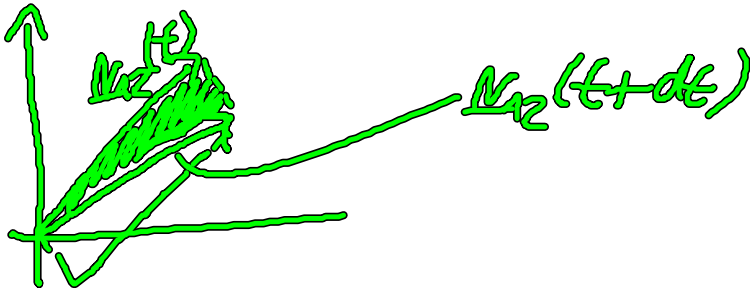
Dieses Ergebnis (Bahn $r(\varphi)$ ist Ellipse) entspricht genau dem 1. Keplerschen Gesetz der Planetenbewegung

2. Kepler'sches Gesetz

Der „Fahrstrahl“ von der Sonne zum Planeten (d.h. der Vektor $\underline{r}_2(t)$) überstricht in gleichen Zeiten gleiche Ränder („Rändersatz“)

Das ist Folge der Drehimpulserhaltung

dS : Ränder, die in der Bahnebene in der Zeit dt überstrichen wird



$$dS = \frac{|\underline{r}_2(t) \times \underline{r}_2(t+dt)|}{2}$$

umschreiben so
dass L_{rel} vorkommt!

3. Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich
wie die Kuben der großen Halbachsen!

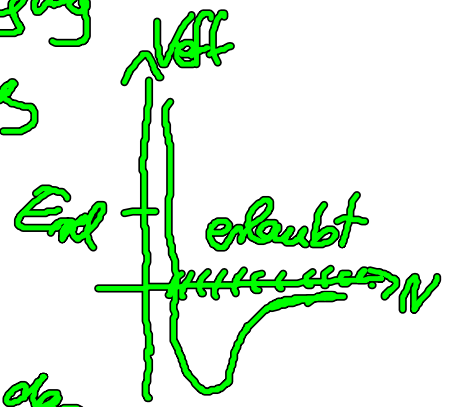
→ Lösung
Zurück zur Diskussion der Planetenbewegung

ii) $E_{\text{rel}} > 0$: ungebundene Bewegung

→ Bahn $r(\varphi)$ ist Hyperbel



Bahn, die das Teilchen ohne Kraftzentrum hätte



Teilchenbahn wird um den Winkel α abgelenkt

es gilt:

$$d = \frac{L_{\text{rel}}}{\sqrt{2m E_{\text{rel}}}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} \frac{M \mu}{d E_{\text{rel}}}$$

(Stoßparameter)

Dieser Fall ist auch sehr wichtig in der Atomphysik
→ Ablenkung geladener Teilchen bei der Streuung an positiv geladenen Atomkernen (Coulombpotential $\sim -\frac{1}{r}$)

e) Abschließende Bemerkungen zum Kepler-Problem

- Aus dem 2. Hauptsatz lässt sich zeigen:
speziell für $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$ ($\kappa = \text{const}$) gilt es außer Energie und Drehimpuls noch eine weitere Erhaltungsgröße

Lorentz'sche Vekt.: $\underline{A} = (\underline{v} \times \underline{L}) + V(n) \underline{n}$

$\underline{\dot{A}} = 0$! gilt nur für $V(n) \sim \frac{1}{r}$!

- Allgemeine Relativitätstheorie (\rightarrow Astrophysik) sehr
Es gibt Korrekturen zum Gravitationspotential für kleine
Abstände

I.5. Energie und Dissipation (nicht speziell für Zwei-Körper-Problem, sondern allgemein!)

Frage: Was passiert mit der Gesamtenergie eines
Systems in Anwesenheit dissipativer Kräfte?

Ausgangspunkt $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i$ Gesamtkraft auf
Teilchen i

multipliziert mit \underline{v}_i und summiert über alle $i=1, \dots, N$
(wie in Kap I.3)

$$\sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i \quad (*)$$

Zerlege die Kräfte wie folgt.

$$\underline{F}_i = \underbrace{-\nabla_i V}_{\text{Konservativer Anteil}} + \underbrace{\underline{F}_i^{\text{diss}}}_{\text{dissipativer Anteil}}$$

benutze:

$$\frac{d}{dt} m_i (\dot{\underline{r}}_i)^2 = m_i \dot{\underline{r}}_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot 2, \quad \frac{d}{dt} V = \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

einsetzen in (*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\underline{r}}_i)^2}_T = - \frac{d}{dt} V + \sum_{i=1}^N \overline{\underline{F}}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} T + \frac{d}{dt} V = \sum_{i=1}^N \overline{\underline{F}}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

mit $E = T + V$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} E = \sum_{i=1}^N \overline{\underline{F}}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\underline{r}}_i}$$

Zellische Änderung
der Gesamtenergie E
ist gleich der Leistung
der dissipativen Kräfte
„Energie dissipativ“

Gesamtenergie E
ist nicht konstant!
(Verallgemeinerung der
Aussage aus Kap. I. 3., wo wir
uns mit rein konservativen Systemen
beschäftigt hatten!)