II. Kanonische Mechanik: Lagrange-Formalismus

II.1. Motivation

Newton'sche Mechanik

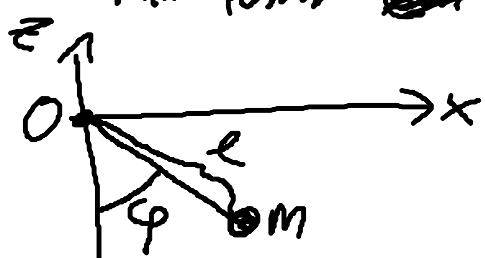
$\Rightarrow$ BWGL für N-Teilchensystem, häufig in kartesischen Koordinaten

aber:

In vielen Fällen unterliegt die Bewegung der Teilchen bestimmten „Zwangsbedingungen", die die Bewegung einschränken. Die Zwangsbedingungen werden durch sog. „Zwangskräfte" hervorgerufen

$\Rightarrow$ In solchen Fällen wird die Newton'sche Mechanik unbequem (häufig ist auch die Angabe der Zwangskräfte schwierig)

Beispiel: Massenpunkt an ebenem Fadenpendel mit fester ~~[illegible]~~ Länge l



es wirkt
- die Schwerkraft
- die „Fadenkraft" (Zwangskraft)

— sorgt dafür, daß $l = \text{const}$!

man sieht auch: Die Anwesenheit der Zwangsbedingung führt hier zu einer Reduktion der Zahl der „Freiheitsgrade"

ohne Faden: $f = 2$

mit Faden $f = 1$

(Zahl der Freiheitsgrade bei ebenen Bewegung)

Lagrange-Mechanik:
Allgemeinere Formulierung der Mechanik, mit der Zwangsbedingungen einfacher zu handhaben sind

II.2. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

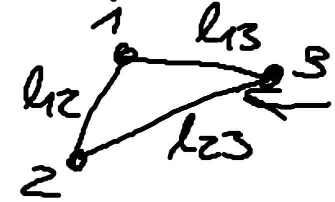
Klassifikation

i) holonome Zwangsbedingungen

$\Rightarrow$ beschreibbar durch eine geschlossene Gleichung der Form $f_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0$

$\lambda = 1, \ldots, p$ ← Zahl der unabhäng. Zwangsbedingungen

Beispiel:



feste Stangen

$l_{12} = \text{const}$
$l_{13} = \text{const}$
$l_{23} = \text{const}$

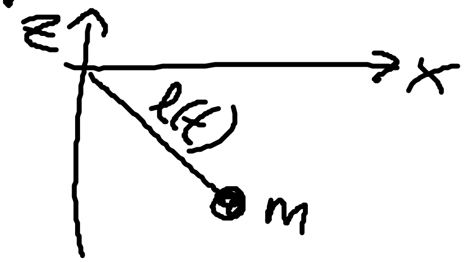
hier $p=3$:
$$f_1 = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2| - l_{12} = 0$$
$$f_2 = |\underline{r}_2 - \underline{r}_3| - l_{23} = 0$$
$$f_3 = |\underline{r}_1 - \underline{r}_3| - l_{13} = 0$$

$\Rightarrow$ Diese Zwangsbedingungen sind offensichtlich ~~zeit~~ unabhängig von der Zeit $\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} = 0\right)$

$\rightarrow$ „skleronome" Zwangsbedingungen!

Holonome Zwangsbedingungen können aber auch zeitabhängig sein! $\Rightarrow$ „rheonome" Zwangsbed.

Beispiel: Ebenes Fadenpendel mit variabler Länge



$$x^2+z^2-(l(t))^2=0$$

ii) Nicht holonome Zwangsbedingungen

$\Rightarrow$ nicht darstellbar in der Form $f_\lambda(\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_N,t)=0$

typische Form:

$$\circledast \quad \sum_{i=1}^{N} \underset{\text{Vektor}}{\underline{a}}_{\lambda,i}(\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_N,t)\cdot d\underline{r}_i + \underset{\text{Skalar}}{a_\lambda}(\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_N,t)\,dt=0$$

$$\lambda=1,\ldots,p$$

Umschreiben von $\circledast$ durch Teilen durch dt

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i}(\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_N,t)\cdot\underline{v}_i + a_\lambda(\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_N,t)=0$$

$$\lambda=1,\ldots,p$$

Beispiel:
Rangieren mit dem Auto
$\Rightarrow$ momentane Bewegung ist durch die Radrichtung d.h. auch durch $\underline{v}$ bestimmt
(trotzdem ist jeder Ort erreichbar $\Rightarrow$ keine echte Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade!

Beachte:
Unter best. Bedingungen kann ⊛ auf eine holonome Zwangsbed. zurückgeführt werden

$$\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t) \quad \text{mit} \quad \underbrace{A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)=0}_{\text{holonome Bed}}$$

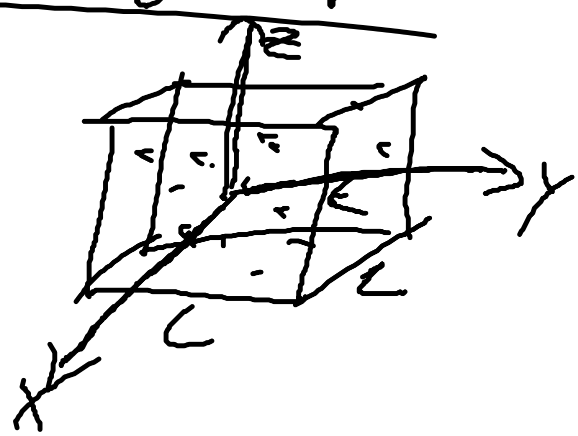
$$a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \frac{dA_\lambda}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_i A_\lambda \cdot \dot{\underline{r}}_i + \frac{\partial A_\lambda}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \underline{a}_{i,\lambda} \cdot \dot{\underline{r}}_i + a_\lambda = 0$$

iii) Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen

Beispiel: Gasteilchen im Kasten (Würfel)



$$-\frac{L}{2} \le x_i, y_i, z_i \le \frac{L}{2}$$

$\Rightarrow$ Keine echte Reduktion von Freiheitsgraden

Annahme:
Zwangsbedingungen werden durch Zwangskräfte erzwungen
$\hookrightarrow \underline{Z}_i$ (für Teilchen i)

$\underline{Z}_i$ wirkt zusätzlich zur ohnehin vorhandenen Kraft $\underline{F}_i$

$\Longrightarrow$ Modifikation der Newtonschen BWGL:

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

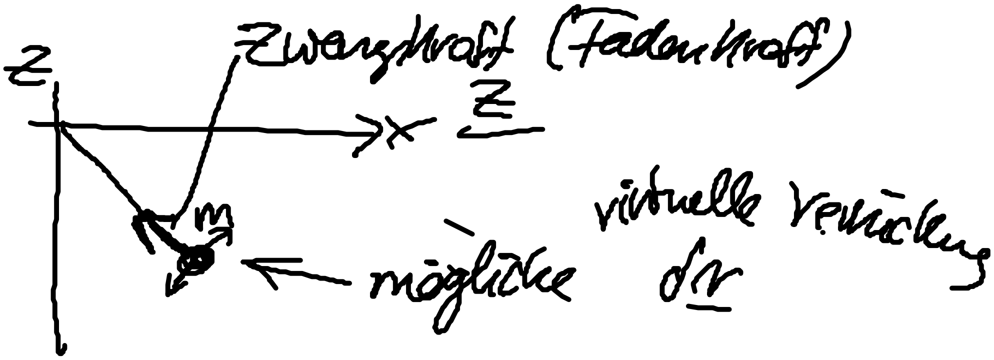
Frage: Wie sollen die $\underline{Z}_i$ bestimmt werden?

II.3. Virtuelle Verrückungen, d'Alembertsches Prinzip

Definition:
virtuelle Verrückung $\delta \underline{r}_i \Longleftrightarrow$ infinitesimale Änderung der Koordinaten, die
a) mit den Zwangsbedingungen verträglich ist
b) zu einer festen Zeit stattfindet

virtuelle Verrückung $\neq$ tatsächliche Verrückung $d\underline{r}_i$ in einem Zeitintervall dt

Beispiel:
Ebenes Fadenpendel ($l = \text{const}$)



also $\underline{Z}$ steht senkrecht auf $\delta\underline{r}$!

Allgemein fordert man

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta\underline{r}_i}_{\text{virtuelle Arbeit}} = 0}$$

„Zwangskräfte stehen senkrecht auf den virtuellen Verrückungen."

„Prinzip der virtuellen Arbeit"

Die Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit!
(beachte: Diese Forderung betrifft die Summe über alle Teilchen!)

Wir benutzen dieses Prinzip nun zur Umformulierung der Newton'schen BWG mit Zwangskraft

① $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i \Longrightarrow (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i) = 0$

multiplizieren mit $\delta \underline{r}_i$ und summiere

② $\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

$$\overset{②}{\Longrightarrow} \boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0}$$

„d'Alembertsches Prinzip"

Bemerkungen:

i) Zwangskräfte tauchen nicht mehr explizit auf!

ii) Formulierung ist immer noch unpraktisch, da die virtuellen Verrückungen nicht unbedingt unabhängig voneinander sind!

iii) Falls alle $d\underline{r}_i$ unabhängig ~~und~~ voneinander und unbeeinflusst von Zwangskräft

$\Rightarrow$ für jeden Term in der Summe gilt

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i = 0$$

$\Rightarrow$ Newton!

II.4. Lagrange-Gleichungen 1. Art

Annahme: Zwangsbed. beschreibbar in der Form

$$\circledast \quad \sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)\, dt = 0$$

$$\lambda = 1, \dots, p$$

(reduziert sich auf holonome Bed. im Fall $\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$, $a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$ und $A_\lambda(\dots) = 0$)

Anwendung von $\circledast$ auf eine virtuelle Verrückung

$$d\underline{r}_i \rightarrow \delta\underline{r}_i$$

$$dt = 0$$

aus $\circledast$ wird: $\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \qquad \lambda = 1, \dots, p$

andererseits hatten wir gesehen: $\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta\underline{r}_i = 0$ Prinzip der virtuellen Arbeit!

Ansatz für die Zwangskräfte:

$$\boxed{\underline{Z}_i = \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, \underline{a}_{i,\lambda}}$$

(Erinnerung: für holonome spezielle Zwangsbed. $\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda$)

Zusammenhang zw. Zwangskraft und Zwangsbedingung!

schön, aber was sind die Koeffizienten μ_λ?

Einsetzen in unsere „alte" BWGL

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, \underline{a}_{i,\lambda}}$$

Vektorgleichung

Lagrange-Gleichungen 1. Art!
„Lagrange I"

Umschreiben in Komponentenform (Annahme: $m_i = m$)

$$\boxed{m \ddot{x}_k - F_k - \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda a_{k,\lambda} = 0}$$

$k = 1, \dots, 3N$

$\Rightarrow$ 3N Gleichungen

$\Rightarrow$ Ergänzung durch p Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda \, dt = 0$$

(bzw. $A_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$)

Es gibt also insgesamt $3N+p$ Gleichungen für die Unbekannten $x_k(t)$ und μ_λ

<u>Vorgehensweise in der Praxis</u>

- Bestimme die p voneinander unabhängigen Zwangsbed. und bestimme die Größen $\underline{a}_{i\lambda}$ und a_λ
- Löse die $3N+p$ Gleichungen für $x_k(t)$ und μ_λ

  — fertig !
- Falls gewünscht, explizite Bestimmung der Zwangskräfte

$$\underline{Z}_i = \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \underline{a}_{i\lambda}$$

Trotzdem
Verfahren immer noch umständlich!