II. Klassische Mechanik: Lagrange-Formalismus

II.1. Motivation

Newton'sche Mechanik

$\Rightarrow$ BWGL für N-Teilchensystem,
häufig in kartesischen Koordinaten

aber:
In vielen Fällen unterliegt die Bewegung der Teilchen bestimmten „Zwangsbedingungen", die die Bewegung einschränken. Die Zwangsbedingungen werden durch sog. „Zwangskräfte" hervorgerufen

$\Rightarrow$ In solchen Fällen wird die Newton'sche Mechanik unbequem (häufig ist auch die Angabe der Zwangskräfte schwierig)

Beispiel: Massenpunkt an einem Fadenpendel mit fester Länge l

es wirkt
– die Schwerkraft
– die „Fadenkraft" (Zwangskraft)

$\leftarrow$ sorgt dafür, daß $l = \text{const}$!

man sieht auch: Die Anwesenheit der Zwangsbedingung führt hier zu einer Reduktion der Zahl der „Freiheitsgrade"

ohne Faden: $f = 2$
mit Faden $f = 1$

(Zahl der Freiheitsgrade bei ebener Bewegung)

Lagrange-Mechanik:
Allgemeinere Formulierung der Mechanik, mit der Zwangsbedingungen einfacher zu handhaben sind

II.2. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Klassifikation

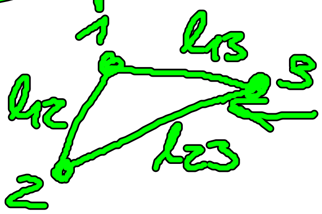
i) holonome Zwangsbedingungen

$\Rightarrow$ beschreibbar durch eine geschlossene Gleichung der Form $f_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)=0$

$\lambda = 1,\dots,p$

$\uparrow$ Zahl der unabhäng. Zwangsbedingunge

Beispiel:



feste Stangen

$l_{12}=\text{const}$
$l_{13}=\text{const}$
$l_{23}=\text{const}$

hier $p=3$:

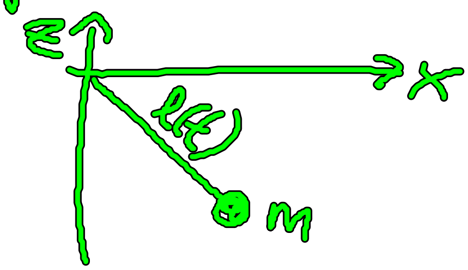
$$f_1=|\underline{r}_1-\underline{r}_2|-l_{12}=0$$
$$f_2=|\underline{r}_2-\underline{r}_3|-l_{23}=0$$
$$f_3=|\underline{r}_1-\underline{r}_3|-l_{13}=0$$

$\Rightarrow$ Diese Zwangsbedingungen sind offensichtlich unabhängig von der Zeit $\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial t}=0\right)$

$\rightarrow$ „skleronome" Zwangsbedingungen!

Holonome Zwangsbedingungen können aber auch zeitabhängig sein! $\Rightarrow$ „rheonome" Zwangsbed.

Beispiel: Ebenes Fadenpendel mit variabler Länge



$$x^2 + z^2 - (l(t))^2 = 0$$

ii) Nicht holonome Zwangsbedingungen

$\Rightarrow$ nicht darstellbar in der Form $f_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0$

typische Form:

$$\circledast \quad \sum_{i=1}^{N} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}}{\underline{a}_{\lambda, i}}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) \cdot d\underline{r}_i + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}}{a_\lambda}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t)\, dt = 0$$

$\lambda = 1, \ldots, p$

umschreiben von $\circledast$ durch Teilen durch dt

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda, i}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) \cdot \underline{v}_i + a_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0$$

$\lambda = 1, \ldots, p$

Beispiel:
Rangieren mit dem Auto
$\Rightarrow$ momentane Bewegung ist durch die Radrichtung
d.h. auch durch $\underline{v}$ bestimmt
(trotzdem ist jeder Ort erreichbar $\Rightarrow$ keine echte Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade!)

Beachte:
Unter best. Bedingungen kann (*) auf eine holonome Zwangsbed. zurückgeführt werden

$$\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t) \quad \text{mit} \quad \underbrace{A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)=0}_{\text{holonome Bed.}}$$

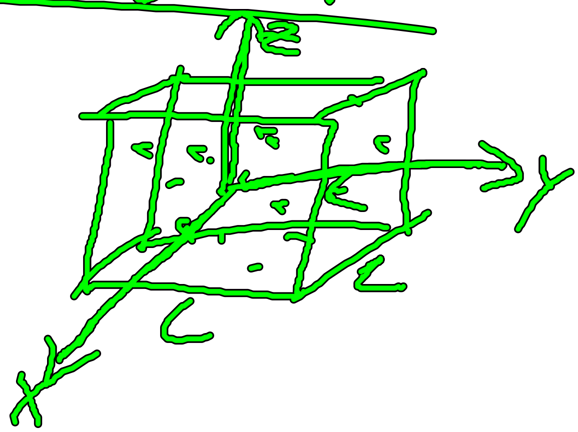
$$a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dA_\lambda}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_i A_\lambda \cdot \dot{\underline{r}}_i + \frac{\partial A_\lambda}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \underline{a}_{i,\lambda} \cdot \dot{\underline{r}}_i + a_\lambda = 0$$

iii) Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen

Beispiel: Gasteilchen im Kasten (Würfel)



$$-\frac{L}{2} \le x_i, y_i, z_i \le \frac{L}{2}$$

$\Rightarrow$ keine echte Reduktion von Freiheitsgraden

Annahme:
Zwangsbedingungen werden durch Zwangskräfte erzwungen
$\hookrightarrow \underline{Z}_i$ (für Teilchen i)

$\underline{Z}_i$: wirkt zusätzlich zur ohnehin vorhandenen Kraft $\underline{F}_i$

$\Longrightarrow$ Modifikation der Newtonschen Bwgl.:

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

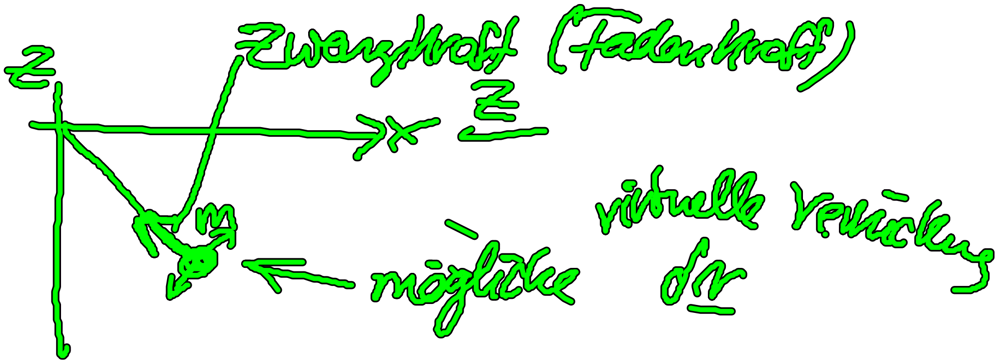
Frage: Wie sollen die $\underline{Z}_i$ bestimmt werden?

II.3. Virtuelle Verrückungen, d'Alembertsches Prinzip

Definition:
virtuelle Verrückung $\delta \underline{r}_i$ $\Longleftrightarrow$ infinitesimale Änderung der Koordinaten, die
a) mit den Zwangsbedingungen verträglich ist
b) zu einer festen Zeit stattfindet

virtuelle Verrückung $\neq$ tatsächliche Verrückung $d\underline{r}_i$ in einem Zeitintervall dt

Beispiel:
Ebenes Fadenpendel ($l = \text{const}$)



also $\underline{Z}$ steht senkrecht auf $\delta\underline{r}$!

Allgemein fordert man

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{virtuelle Arbeit}} = 0}$$

„Zwangskräfte stehen senkrecht auf den virtuellen Verrückungen."

„Prinzip der virtuellen Arbeit"

Die Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit!

(beachte: Diese Forderung betrifft die Summe über alle Teilchen!)

Wir benutzen dieses Prinzip nun zur Umformulierung der Newton'schen BWG mit Zwangskraft

(1) $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i \Longrightarrow (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i) = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$

multiplizieren mit $\delta \underline{r}_i$ und summieren

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

(2) $\Longrightarrow$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0}$$

„d'Alembert'sches Prinzip"

Bemerkungen:

i) Zwangskräfte tauchen nicht mehr explizit auf!

ii) Formulierung ist immer noch unpraktisch, da die virtuellen Verrückungen nicht unbedingt unabhängig voneinander sind!

iii) Falls alle $d\underline{r}_i$ unabhängig ~~und~~ voneinander und unbeeinflusst von Zwangskräften

$\Rightarrow$ für jeden Term in der Summe gilt

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i = 0$$

$\Rightarrow$ Newton!

II.4. Lagrange-Gleichungen 1. Art

Annahme: Zwangsbed. beschreibbar in der Form

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t)\, dt = 0$$

$$\lambda = 1, \ldots, p$$

(reduziert sich auf holonome Bed. im Falle $\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t)$, $a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$ und $A_\lambda(\ldots) = 0$)

Anwendung von $(*)$ auf eine virtuelle Verrückung

$$d\underline{r}_i \rightarrow \delta\underline{r}_i$$
$$dt = 0$$

aus $(*)$ wird:

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \qquad \lambda = 1, \ldots, p$$

andererseits hatten wir gesehen:

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta\underline{r}_i = 0$$

Prinzip der virtuellen Arbeit!

Ansatz für die Zwangskräfte:

$$\boxed{\underline{Z}_i = \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, \underline{a}_{i,\lambda}}$$

(Erinnerung: für holonome Zwangsbed. spezielle $\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda$)

Zusammenhang zw. Zwangskraft und Zwangsbedingung!

schön, aber was sind die Koeffizienten μ_λ?

Einsetzen in unsere „alte" BWGL

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, \underline{a}_{i,\lambda}}$$

Vektorgleichung

Lagrange-Gleichungen 1. Art! „Lagrange I"

Umschreiben in Komponentenform (Annahme: $m_i = m$)

$$\boxed{m \ddot{x}_k - F_k - \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda a_{k,\lambda} = 0}$$

$k = 1, \dots, 3N$

$\Rightarrow$ 3N Gleichungen

$\Rightarrow$ Ergänzung durch p Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda \, dt = 0$$

(bzw. $A_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$)

Es gibt also insgesamt $3N+p$ Gleichungen für die Unbekannten $x_k(t)$ und μ_λ

<u>Vorgehensweise in der Praxis</u>

- Bestimme die p voneinander unabhängigen Zwangsbed. und bestimme die Größen $\underline{a}_{i\lambda}$ und a_λ
- Löse die $3N+p$ Gleichungen für $x_k(t)$ und μ_λ

  — fertig!
- Falls gewünscht, explizite Bestimmung der Zwangskräfte

$$\underline{Z}_i := \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \underline{a}_{i\lambda}$$

Trotzdem

Verfahren immer noch umständlich!