$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

$$\ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad \text{d'Alembert}$$

$\Rightarrow$ Lagrange I

$$m \ddot{x}_k - F_k - \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda a_{k,\lambda} = 0$$

$k = 1, \ldots, 3N$

Koeffizienten

Zusätzlich: $\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{i,\lambda} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda dt = 0 \quad , \lambda = 1, \ldots, p$

speziell holonom: $\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda$

$a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$

insgesamt $3N + p$ Gleichungen!

mit $A_\lambda = A_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0$

II.5. Generalisierte Koordinaten

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall holonomer Zwangbedingungen, d.h. $A_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0 \;, \lambda = 1, \ldots, p$

$\Rightarrow$ Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade $f = 3N - p$

Idee:

Finde einen Satz von f problemangepaßten Koordinaten, d.h. Koordinaten, die die Zwangsbedingungen bereits berücksichtigen!

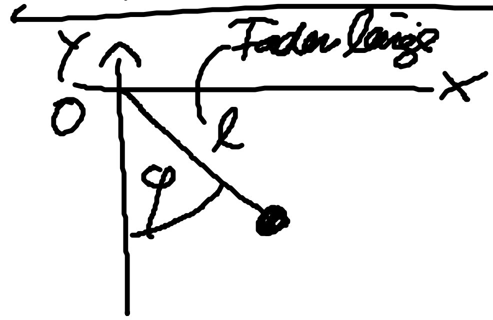
$\Longrightarrow$ generalisierte Koordinaten

Notation: $\{q_k\}$, $k = 1, \ldots, f$

Man benötigt außerdem die Transformationsgleichungen

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t) = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$$

Beispiel: Ebenes Fadenpendel



2 Zwangsbedingungen:

- Bewegung in der x-y-Ebene $\Longrightarrow z(t) = 0 \quad \forall t$
- $(x(t))^2 + (y(t))^2 = l^2$

$\longrightarrow f = 1$

wähle als generalisierte Koordinate den Winkel $\varphi(t)$

Transformationsgleichungen: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin\varphi(t) \\ -l\cos\varphi(t) \end{pmatrix}$

Ziel nun: Umschreibung der Bewegungsgleichungen so, daß die generalisierten Koordinaten vorkommen!

II.6. Lagrangegleichungen 2. Art

Ausgangspunkt: d'Alembertsches Prinzip

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (*)$$

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

virtuelle Verrückung:

$$\delta \underline{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

/ Kein Term ~~dt~~ mit dt, da die virtuelle Verrückung zu einem festen Zeitpunkt abläuft!

Einsetzen in (*)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k}_{\text{rechte Seite}}$$

$$\rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$ „generalisierte Kraft"

$$\text{Linke Seite} = \sum_{k=1}^{f} Q_k \, \delta q_k$$

Die linke Seite läßt sich wie folgt umschreiben.

mit $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2$ kinetische Energie mit $\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i$

$$\sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

kombiniere mit rechter Seite:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0}$$

Beachte: Die q_k's können unabhängig voneinander variiert werden

Obige Gleichung gilt für jedes k:

$$\Rightarrow \cancel{\frac{d}{dt}}\ \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k=0}$$

„Lagrange-Gleichungen 2. Art"

Bemerkungen

- Die Lagrangegleichungen 2. Art enthalten nur noch die generalisierten Koordinaten $\{q_k\}$ und die generalisierten Geschwindigkeiten $\{\dot q_k\}$, sowie die Größen T (kinetische Energie) und $\{Q_k\}$ (generalisierte Kräfte)
- Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind etwas weniger allgemein als die Lagrange-Gleichungen 1. Art da hier Einschränkung auf holonome Zwangsbedingungen!
- Betrachte speziell konservative Systeme

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$ mit V ~~zu~~ skalares Potential zur Kraft

$$V=(\underline{r}_1(q_1,\dots,q_f,t),\ \underline{r}_2(q_1,\dots,q_f,t)$$

$\ldots \underline{r}_N(q_1, \ldots q_f, t), t)$

Funktion von Koordinaten, nicht von Geschwindigkeiten!

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

wir hatten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

definiere die sogenannte <u>Lagrangefunktion</u>:

$$L = T - V = L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

$k = 1, \ldots, f$

Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Kräfte

<u>Bemerkungen</u>

i) mathematisch: Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit!

$\Rightarrow$ lösbar mit $2f$ Anfangsbedingungen für $q_k(t=0)$ und $\dot{q}_k(t=0)$

ii) Die Definition der Lagrangefunktion $L = T - V$ ist nicht eindeutig. Bestimmte „Eichtransformationen" von L führen zu denselben Lagrangegleichungen!

iii) Allgemeine Form der kinetische Energie ~~aus~~ ausgedrückt durch $\{q_k\}$ bzw $\{\dot{q}_k\}$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2$$ benutze $\dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

basierend auf den Transformationsgleichunge

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{f}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k,l=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l$$

also: Nur für den Fall $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$ hat T die „übliche" Form, in der nur (generalisierte) Geschwindigkeiten vorkommen!

Anwendungsschema für Lagrange II

i) Auswahl der $f = 3N - p$ generalisierten Koordinaten und Aufstellung der Transformationsgleichungen

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t)$$

ii) Berechnung der Geschwindigkeiten

$\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i$ als Funktion der $\dot{q}_k$ (und $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$)

$\Longrightarrow$ kinetische Energie T

iii) • Konservative Kräfte:

Bestimmung des Potentials $V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$
$= V(q_1, \dots, q_f, t)$

$\Rightarrow L = T - V$

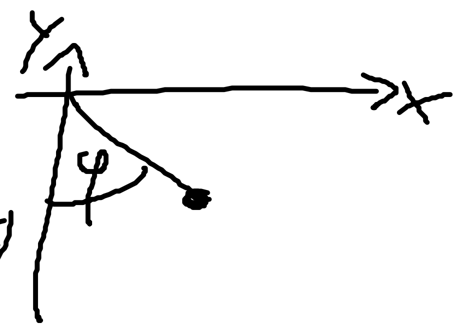
• Nicht-Konservative Kräfte

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

iv) Aufstellung und Lösung der BWGL

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}_{\text{Konservativ}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}}_{\text{nicht-Konservativ}}$$

<u>Beispiele</u>



1) Ebenes Fadenpendel

i) generalisierte Koordinate $\varphi(t)$

$$x(t) = l \sin\varphi(t), \quad y(t) = -l\cos\varphi(t)$$

Transformationsgleichungen

ii) Geschwindigkeiten:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2)$$

$$T = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi})$$

iii) Es wirkt die (konservative) Schwerkraft $\underline{F} = -mg\hat{\underline{e}}_y$

Potential

$$\Rightarrow V(y) = mgy$$
$$= -mg\ell \cos\varphi(t)$$

Transformations-gleichung.

$\Rightarrow$ Lagrangefunktion: $L = T - V$
$$= \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi$$

iv) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot{\varphi}\right) + mg\ell\sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = 0}$$

DGL 2. Ordnung für den Winkel φ!

Annahme: Kleine Auslenkungen: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow \boxed{m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = 0}$$

„harmonische Schwingungen"

$$\Rightarrow \varphi(t) = Ae^{i\omega t}$$

Beispiel

② N Teilchen ohne Zwangsbedingungen!

generalisierte Koordinaten $\hat{=}$ kartesische Koordinaten

$$\Rightarrow L = \sum_i \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2 - V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t)$$

$$q_k \rightarrow \alpha_i \quad \text{mit } \alpha = x, y, z$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_i}\left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{2}\delta_{ij}\cdot 2\dot{\alpha}_j = \frac{d}{dt} m_i \dot{\alpha}_i$$

$$= m_i \ddot{\alpha}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = (F_i)_\alpha$$

aus Lagrange-Gl. 2. Art

$$\boxed{m_i \ddot{\alpha}_i = (F_i)_\alpha}$$

Newton!