

$$m_i \ddot{r}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

$$\dots \Rightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{r}_i - \underline{F}_i) \cdot d\underline{r}_i = 0 \quad \text{d'Alembert}$$

\Rightarrow Lagrange I

$$m_i \ddot{x}_k - F_k - \sum_{\lambda=1}^p \mu_\lambda a_{k,\lambda} = 0$$

$$k = 1, \dots, 3N$$

Koeffizienten

Zusätzlich: $\sum_{i=1}^N a_{i,\lambda} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda d\underline{z} = 0, \quad \lambda = 1, \dots, p$

speziell holonom: $a_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda$

$$a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial \underline{z}}$$

insgesamt $3N + p$

Gleichungen!

mit $A_\lambda = A_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \underline{z}) = 0$

II.5. Generalisierte Koordinaten

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall holonomer Zwangsbedingungen, d.h. $A_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \underline{z}) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, p$

\Rightarrow Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade $f = 3N - p$

Idee:

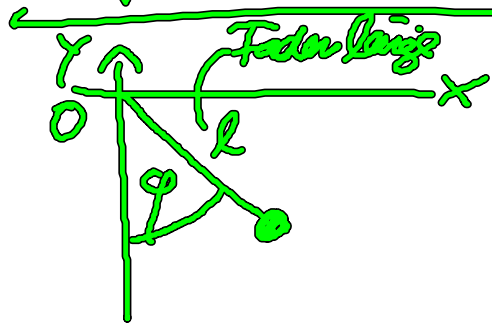
Finde einen Satz von f problemangepasster
Koordinaten, d.h. Koordinaten, die die Zwangsbedingungen
bereits berücksichtigen!

→ generalisierte Koordinate

Notation: $\{q_k\}$, $k=1, \dots, f$

Man benötigt außerdem die Transformationsgleichungen
 $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$

Beispiel: Ebene Federpendel



2 Zwangsbedingungen:

- Bewegung in der $x-y$ -Ebene
- $(x(t))^2 + (y(t))^2 = l^2 \Rightarrow z(t) = 0 \quad \forall t$

→ $f=1$

Wähle als generalisierte Koordinate
den Winkel $\varphi(t)$

Transformationsgleichungen: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin \varphi(t) \\ -l \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Ziel nun: Umschreibung der Bewegungsgleichungen
so, dass die generalisierten Koordinaten vorkommen!

II.6. Lagrange Gleichungen 2. Art

Ausgangspunkt: d'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot d\underline{r}_i = 0 \quad (*)$$

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

virtuelle Verschiebung:

$$d\underline{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} dq_k$$

(Kein Term ~~da~~ mit dt , da die virtuelle Verschiebung zu einem festen Zeitpunkt abläuft!)

Einsetzen in (*)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} dq_k}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} dq_k}_{\text{rechte Seite}}$$

linke Seite

rechte Seite

$$\Rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \quad \text{"generalisierte Kraft"}$$

$$\text{linke Seite} = \sum_{k=1}^f Q_k dq_k$$

Die linke Seite lässt sich wie folgt umschreiben.

mit $T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2$ mit $\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i$
Kinetische Energie

$$\sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) dq_k$$

Kombiniere mit rechte Seite:

$$\sum_{k=1}^f \left(d \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0$$

Beachte: Die q_k 's können unabhängig variiert werden

Obige Gleichung gilt für jedes k :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0$$

„Lagrange-Gleichungen 2. Art“

Bemerkungen

- Die Lagrange-Gleichungen 2. Art enthalten nur noch die generalisierten Koordinaten $\{q_k\}$ und die generalisierten Geschwindigkeiten $\{\dot{q}_k\}$, sowie die Größen T (kinetische Energie) und $\{Q_k\}$ (generalisierte Kräfte)
- Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind etwas weniger allgemein als die Lagrange-Gleichungen 1. Art, da hier Einschränkung auf holonome Zwangsbedingungen!

• Betrachte speziell konservatives System

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad \text{mit } V \text{ als Potential zur Kraft}$$

$$V = (V_1(q_1, \dots, q_f, t), V_2(q_1, \dots, q_f, t))$$

... $\sigma_N(q_1, \dots, q_f, t)$
 Funktion von Koordinaten, nicht
 von Geschwindigkeiten!

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Wir haben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

definiere die sogenannte Lagrangefunktion:

$$L = T - V = L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

$k = 1, \dots, f$

Lagrange-Gleichungen
 2. Art für konservativen
 Kraft

Bemerkungen

i) mathematisch: Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit!
 \Rightarrow lösbar mit 2f Anfangsbedingungen für $q_k(t=0)$ und $\dot{q}_k(t=0)$

ii) Die Definition der Lagrangefunktion $L = T - V$ ist nicht eindeutig. Bestimmte „Eichtransformationen“ von L führen zu denselben Lagrange-Gleichungen!

iii) Allgemeine Form der kinetischen Energie ~~aus~~
ausgedrückt durch $\{q_k\}$ bzw. $\{\dot{q}_k\}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i^2 \quad \text{benutze } \underline{v}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{d\underline{r}_i}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{d\underline{r}_i}{dt} \right)^2$$

basierend auf den
Transformationsgleichungen

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\underline{r}_i}{dt} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^f m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k,l=1}^f \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

also: Nur für den Fall $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$ hat T
die „übliche“ Form, in der nur (generalisierte)
Geschwindigkeiten vorkommen!

Anwendungsschema für Lagrange II

i) Auswahl der $f = 3N - p$ generalisierte Koordinaten
und Aufstellung der Transformationsgleichungen

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

ii) Berechnung der Geschwindigkeit

$$\underline{v}_i = \underline{\dot{r}}_i \quad \text{als Funktionen der } \dot{q}_k \quad \left(\text{und } \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right)$$

\Rightarrow kinetische Energie T

iii) - Konservative Kräfte:
 Bestimmung des Potentials $V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n, t)$
 $= V(q_1, \dots, q_n, t)$
 $\Rightarrow L = T - V$

- Nicht-konservative Kräfte

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

iv) Aufstellung und Lösung der BWGL

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Konservativ

oder

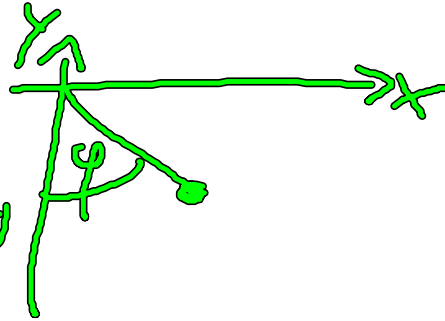
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

nicht-konservativ

Beispiele

1) Ebene Federpendel

i) generalisierte Koordinat $\varphi(t)$



$$x(t) = l \sin \varphi(t), \quad y(t) = -l \cos \varphi(t)$$

Transformationsgleichungen

ii) Geschwindigkeitsvektor:

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ l \sin \varphi \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2)$$

$$T = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi})$$

iii) Es wirkt die (Korsettweite) Schwerkraft
 Potentia $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$

$$\Rightarrow V(y) = mgy$$

$$= -mg\ell \cos\varphi(t)$$

Transformations-
gleichung.

$$\Rightarrow \text{Lagrangefunktion: } L = T - V$$

$$= \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell \cos\varphi$$

$$iv) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\varphi}) + mg\ell \sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m\ell^2 \ddot{\varphi} + mg\ell \sin\varphi = 0} \quad \text{DGL 2. Ordnung}$$

kur den Winkel φ !

Annahme: kleine Auslenkungen: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow \boxed{m\ell^2 \ddot{\varphi} + mg\ell \varphi = 0}$$

„harmonische Schwingungen“

$$\Rightarrow \varphi(t) = A e^{i\omega t}$$

Beispiel

② N Teilchen ohne Zusatzbedingungen!

generalisierte Koordinaten $\hat{=}$ kartesische Koordinaten

$$\rightarrow L = \sum_i \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2 - V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$$

$q_k \rightarrow \alpha_i$ mit $\alpha = x, y, z$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_i} (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \delta_{ij} \cdot 2 \dot{\alpha}_j = \frac{d}{dt} m_i \dot{\alpha}_i \\ &= m_i \ddot{\alpha}_i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = - \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \underline{F}_i$$

aus Lagrange-Gl. 2. Art

$$\boxed{m_i \ddot{\alpha}_i = \underline{F}_i}$$

Newton!