II.8. Das Hamilton'sche Prinzip

Erinnerung:
Bisherige Behandlung von Systemen mit Zwangsbedingungen: d'Alembertsches Prinzip

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m\ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i)\cdot \delta \underline{r}_i = 0}$$

Die gesamte geleistete „virtuelle Arbeit" ist Null

„virtuelle Verrückungen"

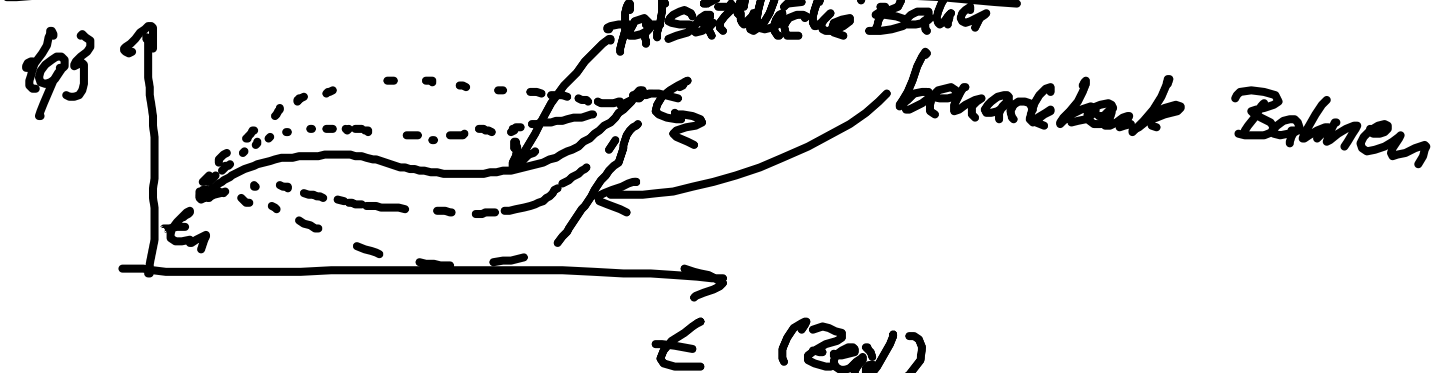
Das d'Alembertsche Prinzip kann auch als sogenanntes „Differentialprinzip" aufgefasst.
Man vergleicht den momentanen Zustand des Systems mit dem Zustand, der sich aus kleinen virtuellen Verrückungen ergibt.

man sagt:
Die erhaltene Bewegung ist gegen kleine Verrückungen stabil → Der Zustand des Systems ist „Extremalzustand"

Zeige nun:
Die Lagrange-BWGL lassen sich auch aus einem anderen Extremalprinzip herleiten — ~~und~~ zwar viel eleganter!
└ „Integralprinzip": Hamilton'sches Extremalprinzip!

Vorteile gegenüber d'Alembertschen Prinzip
- sehr elegante Formulierung
- Ideen hinter dem Hamilton'schen Prinzip sind auch in vielen anderen Gebieten der Theoretischen Physik wichtig!

Grundidee des Hamilton'schen Prinzip



Die tatsächliche Bahn macht eine bestimmte Integralgröße („Wirkung") extremal $\Longrightarrow$ Lagrange-BWG

Einschub: Element der Variationsrechnung

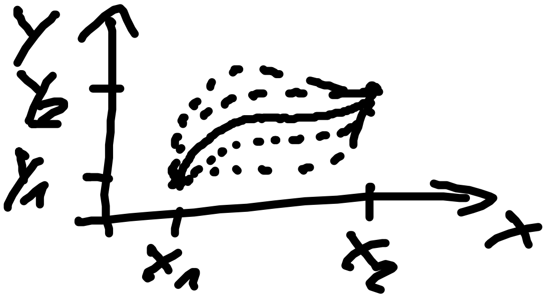
Betrachte zunächst ein-dimensionales Problem

Sei $\underbrace{I[y, y']}_{\text{„Funktional" der Funktionen } y(x)} := \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x, y(x), y'(x))$

mit $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

x_1, x_2 Randpunkte

Gesucht:
Die Funktion $y(x)$, die an den Randpunkten vorgegebene Werte $y_1 = y(x_1)$ und $y_2 = y(x_2)$ annimmt und für die das Funktional I extremal wird



Wie führt man das durch?

Führe dazu zunächst Vergleichskurven ein:

$$y_\alpha(x) = \underbrace{y(x)}_{\text{gesuchte Kurve}} + \underbrace{\alpha}_{\text{Parameter}}\,\eta(x) \quad \text{mit} \quad \eta(x_1)=0,\ \eta(x_2)=0$$

betrachte $\alpha\eta(x) = \delta y(x)$ als kleine Verschiebung der Bahn durch Änderung des Parameters α

Betrachte nun die sogenannte Variation von

$I = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x,y,y')$, d.h. die Änderung von I mit α!

$$\delta I = I_\alpha[y_\alpha, y_\alpha'] - I[y,y']$$

$$= \int_{x_1} dx \left(f(x, y_\alpha, y_\alpha') - f(x, y, y') \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} \right)$$

Annahme: α klein!

die Endpunkte x_1 und x_2 ~~werden ver~~ bleiben von der Variation unbeeinflusst!

Umschreiben des 2. Terms:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha} \right)$$

benutze $y' = \dfrac{dy}{dx}$

partiell integrieren:

$$= \cancel{\left[\frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\frac{dy}{d\alpha}}_{\eta(x)} \right]_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{dy}{d\alpha} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

Erinnerung:

$$y_\alpha = y(x) + \alpha \eta(x) \quad \text{und} \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \, !$$

Zusammenfassung:

$$\partial I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy}{d\alpha} \right)$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \cdot \underbrace{\frac{dy}{d\alpha}}_{\eta(x)}$$

Erinnerung:
Gesucht war die Funktion $y(x)$, für die die Größe I extremal wird, d.h.

$$\delta I = 0 \quad !$$

für beliebige Variationen δy.
(hier $\delta y = \alpha \eta(x)$)

$\Rightarrow$ Es muß also gelten:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Euler'sche Gleichung der Variationsrechnung

<u>Bemerkung:</u>
Anstatt ~~des~~ den Hilfsparameter α einzuführen, kann man auch folgendes schreiben:

$$\delta I = \delta \left(\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x, y, y') \right)$$

$$= \int^{x_2} dx \left(f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y') \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y'}_{\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y} \right)$$

$$\boxed{\delta y' = \frac{d}{dx}\,\delta y}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \overset{!}{=} 0$$

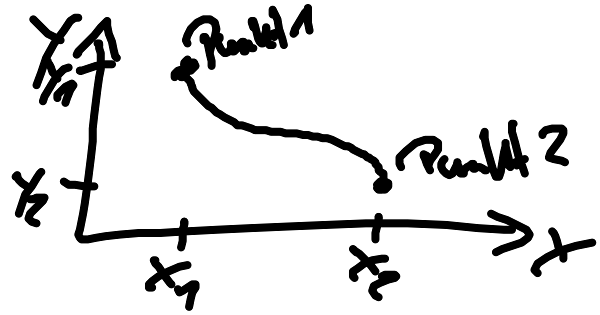
für alle δy

partielle Integration
benutze, daß
$\delta y = 0$ bei x_1 und x_2

$\longrightarrow$ Euler'sche Gleichung $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$

<u>Einfaches Beispiel</u> zum Variationsverfahren:

Suche die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene



Ausgangspunkt:

Element der Bogenlänge $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$= \sqrt{dx^2 + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{y'}{}^2 dx^2} = \sqrt{dx^2 + y'^2 dx^2}$

$= \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

Gesamte Bogenlänge

$$I = \int_{\text{Punkt 1}}^{\text{Punkt 2}} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{f(x,y,y')}$$ Funktional

hängt hier nicht von y ab, nur von y'!

Kürzeste Verbindung?

$\delta I = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ $\Rightarrow$ hier $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

Eulersche Gleichung

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$

Nur erfüllbar durch Ansatz $y'(x) = \text{Const}$!

$\Longleftrightarrow y(x) = ax + b$

Geradengleichung!

Die Konstanten a und b sind festgelegt durch die Forderung $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

II.9. Lagrange-Gleichungen und Hamilton'sches Prinzip

Betrachte mechanisches System mit holonomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften

⇒ Man kann Lagrangefunktion definieren

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$$

Definiere nun die sogenannte Wirkung

$$\boxed{S := \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)}$$

(Wirkungsintegral)

Dimension: Energie mal Zeit

Die tatsächlichen physikalischen Bahnkurven (d.h. die Lösungen der BWGL) zeichnen sich dadurch aus, daß

$$\boxed{\delta S = 0}$$

für beliebige Variationen von den wirklichen Bahnkurven!

(wir müssen also die Variationsrechnung auf viele Variablen $q_1 \dots q_f$ verallgemeinern!)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L(q_1 + \delta q_1, \dots, q_f + \delta q_f, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f + \delta \dot{q}_f, t) - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \Big)$$

kleine Abweichungen!

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\,\delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\underbrace{\delta \dot q_k(t)}_{\frac{d}{dt}\delta q_k(t)} \right)$$

Nebenrechnung (2. Term)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\frac{d}{dt}\,\delta q_k = \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k$$

Forderung: $\delta q_k = 0$ bei den Randpunkten t_1, t_2

$$\Rightarrow \delta S = \int dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k \overset{!}{=} 0$$

δS soll extremal sein für beliebige Abweichungen δq_k

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad k=1,\dots,f$$

beachte: Die generalisierte Koordinaten können unabhängig variiert werden

Hier entspricht also die Euler'sche Gleichung der Lagrange-Gleichung 2. Art!

Bemerkungen:

- Einschränkung auf holonome Zwangsbedingungen
  (sonst könnten wir keine generalisierten Koordinaten definieren!

  (Erinnerung: d'Alembert auch formulierbar für nicht-holonome Zwangsbedingungen!)

- Hamilton'sches Prinzip ist ~~[illegible]~~ Integralprinzip: Man vergleicht tatsächliche Bahn mit Schar von Nachbarbahnen und integriert!