Eichtransformationen

Lagrangefunktion $L \to L' = L + \frac{d}{dt} M(q_1, \dots, q_f, t)$

M ist beliebig, aber nicht geschwindigkeitsabhängig!

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

„Beispiel": geladenes Teilchen im elektromagnet. Feld

Newton: $m\ddot{\underline{q}} = \underbrace{e\underline{E} + \frac{e}{c}(\dot{\underline{q}} \times \underline{B})}_{\text{Lorentzkraft}}$ mit $\underline{q} = \underline{r}$

man findet:

$$L = T - \big(e\underbrace{\phi(\underline{q}, t)}_{\text{skalares Potential}} - \frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}} \cdot \underbrace{\underline{A}(\underline{r}, t)}_{\text{Vektorpotential}}\big)$$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Elektrodynamik:

Eichtransformation der Potentiale ϕ und $\underline{A}$

$$\phi(q,t) \to \phi'(q,t) = \phi(q,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(q,t)$$

$$\underline{A}(q,t) \to \underline{A}'(q,t) = \underline{A}(q,t) + \nabla\chi(q,t)$$

mit $\chi(q,t)$

Eichfreiheit in der Elektrodynamik

läßt die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ invariant!

$$\underline{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}' = -\overset{\text{Gradient}}{\nabla}\phi + \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\chi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi(q,t)}$$

$$= \underline{E}$$

verschwinden, falls $\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \nabla\frac{\partial}{\partial t}\chi$

analog:

$$\underline{B}' = \nabla\times\underline{A}' = \nabla\times\underline{A} + \overbrace{\nabla\times\nabla\chi}^{\text{rot grad}\,\chi = 0!}$$

$$\Rightarrow \underline{B}' = \underline{B} \quad \text{wie gefordert!}$$

Betrachte nun die entsprechende Transformation der Lagrangefunktion

$$L' = T - e\left(\phi' - \frac{1}{c}\underline{\dot{q}}\cdot\underline{A}'\right)$$

$$= T - e\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c}\underline{\dot{q}}\cdot\underline{A} - \frac{1}{c}\underline{\dot{q}}\cdot\nabla\chi\right)$$

$$= \underbrace{T - e\left(\phi - \frac{1}{c}\underline{\dot{q}}\cdot\underline{A}\right)} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \underline{\dot{q}}\cdot\nabla\chi\right)$$

$$= L + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \underline{\dot{q}}\cdot\nabla\chi\right)$$

benutze:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\chi(q,t)\right) = \frac{e}{c}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\chi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{e}{c}\left(\nabla\chi\cdot\dot{q} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

Kombiniere:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{e}{c}\chi(q,t)\right)}_{M(q,t)} \quad !$$

Die Eichtransformation in der Elektrodynamik (d.h. Transformation der Potentiale $\Phi(q,t)$ und $\underline{A}(q,t)$) führen zu einer Umeichung der Lagrangefunktion, die die BWGL $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} = 0\right)$ invariant läßt!

$\Rightarrow$ Physik bleibt erhalten!

Anmerkung: $\underline{F}^{\text{Lorentz}}$ nicht konservativ!
trotzdem Konstruktion einer Lagrangefunktion !?

allgemein gilt für nicht-konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \leftarrow \text{generalisierte Kraft}$$

Konservative System: $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

In manchen nicht-konservativen Fällen kann man ein verallgemeinertes Potential definieren und eine entsprechende verallgemeinerte Lagrangefunktion!

Sei $\tilde{V}$ das verallgemeinerte Potential

speziell im elektromagnetischen Fall:

$$\tilde{V} = e\left(\Phi(q,t) - \frac{1}{c}\,\underline{\dot{q}} \cdot \underline{A}(q,t)\right)$$

$$L = T - \tilde{V}$$

Bedingung: $Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k}$

Beachte: Für Reibungskräfte, die ja auch geschwindigkeitsabhängig sind, läßt sich kein verallgemeinertes Potential definieren

Zum Umgang mit Reibungskräften im Lagrange-Formalismus:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (*)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

Annahme: $$Q_k = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial q_k}}_{\text{Konservativer Anteil}} + \underbrace{Q_k^{(R)}}_{\text{Beitrag der Reibung}}$$

definiere: $L = T - V$

$$\underset{\text{aus } (*)}{\Rightarrow} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{(R)} \qquad (**)$$

Ansatz:

$$Q_k^{(R)} = -\sum_{l=1}^{f} \beta_{lk}\, \dot{q}_k$$

Geschwindigkeits-
abhängigkeit!

Führe ein

$$D = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{f} \sum_{l=1}^{f} \beta_{kl}\, \dot{q}_k \dot{q}_l$$

„Rayleigh'sche Dissipationsfunktion"

$$\Longrightarrow Q_k^{(R)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$$

Einsetzen in **

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0}$$

Lagrange-Gleichungen für System mit Reibung

<u>Beispiel:</u>

Teilchen der Masse m fällt vertikal unter Einfluß der Schwerkraft, dabei erfährt es eine (Stoke'sche) Reibungskraft

(eindimensional!)

generalisierte Koordinate: z

$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \underbrace{mgz}_{V}$$

V : Potential der Schwerkraft

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 \quad \text{mit} \quad v = \dot{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + mg + \alpha\dot{z} = 0}$$

entspricht genau der Newton'schen BWGL!

Beachte auch:

In solchen Systemen (mit konservativen und Reibungskräften) findet man:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(T+V)}_{\text{Gesamtenergie}} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) + \frac{dV}{dt}$$

$$\underset{\text{nächster Ü-Zettel}}{=} \ldots = -2D$$

„Energiedissipation"

$\Rightarrow$ Physikalische Interpretation der Größe D!

II.11 Symmetrien und Erhaltung

Ziel:

Wir zeigen mit Hilfe des Lagrange-Formalismus, daß bestimmte Symmetrien des Systems (d.h. Invarianzen gegenüber bestimmten Transformationen) zur Erhaltung entsprechender physikalischer Größen I führen (d.h. $\frac{dI}{dt} = 0$)

Diese Zusammenhänge zw. Symmetrien und Erhaltung sind Inhalt des Theorems von Emmy-Noether (1918)

Betrachte konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

II.11.1 Zeittranslationssymmetrie

$\hat{=}$ Physikalische Eigenschaften des Systems hängen nicht vom Zeitpunkt der Messung ab

Wann ist das erfüllt?

i) skleronome (d.h. nicht explizit zeitabhängige) Zwangsbedingung

$\Rightarrow$ Transformationsformel $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f)$

d.h. $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

(ii) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ d.h. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Potential darf nicht explizit zeitabhängig sein!

$\Leftrightarrow L = (q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

Betrachte das totale zeitliche Differential von L:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)$$

benutze

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

Kombiniere linke und rechte Seite:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = 0$$

$$\Rightarrow L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$$ ist Erhaltungsgröße!

Interpretation

betrachte dazu zunächst die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{lm} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_m}\dot q_l \dot q_m$$

$$\dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot q_k \qquad = \frac{1}{2}\sum_{lm} T_{lm}\dot q_l \dot q_m$$

$$\text{mit } T_{lm} = \sum_i m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_m}$$

Folgerung:

$$\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\dot q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{f}\dot q_k \Big(\frac{1}{2}\sum_{lm} T_{lm}\delta_{kl}\dot q_m$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{lm} T_{lm}\dot q_l \delta_{km}\Big)$$

$$= \sum_{k,m} T_{km}\dot q_k \dot q_m = 2T \quad !$$

Fei

Die Erhaltungsgröße ergibt sich also:

$$\underbrace{L}_{T-V} - \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k = L - 2T = T - V - 2T$$

$$= -(T+V) = \underline{\underline{-E}}$$

Zeittranslationssymmetrie impliziert also $\frac{dE}{dt} = 0$

Bemerkungen

- Man nennt allgemein $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} =: p_k$ „generalisierte Impulse"

  z.B. freies Teilchen:

  $$L = T = \frac{m}{2} \underline{v}^2 = \frac{m}{2} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)$$

  $$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_x} = m v_x = p_x$$

- Die Funktion

  $$H := \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

  $$= \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L$$

  heißt „Hamilton-Funktion"

Für Systeme mit Zeit-Translationsinvarianz ist H eine Konstante der Bewegung

Speziell für skleronomes System gilt

$$H = T + V = E = \text{const}\,!$$