II.13. Hamilton'sche Gleichungen und das Variationsprinzip

Erinnerung:

Lagrange-Formalismus

$$\underbrace{S}_{\text{Wirkung}} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t)}_{\text{Wirkungsintegral}}$$

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0$$ für die tatsächlich angenommenen Bahnen $q_k(t)$ des Systems

im Integranden:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k$$

D.h. die Variation betrifft die $\{q_k\}$ und $\{\dot{q}_k\}$

Die Zeit wird nicht variiert!

$$\delta S = 0 \Rightarrow \text{Lagrange-BWGL}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip:

Idee: Ersetze L im Original-Ausdruck für S durch die inverse Legendre-Transformierte von H!

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right)}_{\text{Legendre-Transformierte von } H \text{ bzgl. der } \{p_k\}!}$$

mit $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right)$$

Wirkung

Zeige nun:

Aus $\delta S = 0$ folgen die Hamilton'schen BWGL falls man wie folgt vorgeht:

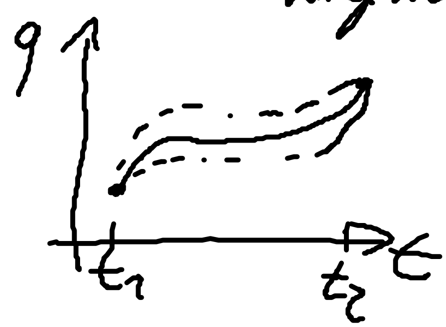
- variiert wird nach $\{q_k\}, \{\dot q_k\}$ <u>und</u> den $\{p_k\}$!

neu gegenüber der alten Vorgehensweise!

- Es gilt (wie vorher)

$$q_k(t_1) = \text{const}$$
$$q_k(t_2) = \text{const}$$

- Die Zeit wird nicht mit variiert!



Durchführung:

definiere $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{q_k\}, \{\dot q_k\}, \{p_k\}, t)$

$$= \sum_k p_k \dot q_k - H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

Variation:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{F}(\ldots)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(\mathcal{F}(\{q_k + \delta q_k\}, \{\dot q_k + \delta \dot q_k\}, \{p_k + \delta p_k\}, t) - \mathcal{F}(\{q_k\}, \{\dot q_k\}, \{p_k\}, t) \Big)$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F}{\partial \dot q_k} \delta \dot q_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k \right) \right) \quad (*)$$

Kleine Variation!

alternativ mit Parametervariation

$$q_k(t) = \underbrace{q_k^\circ(t)}_{\text{tatsächl. Bahn}} + \alpha\, \eta_k(t)$$

$$p_k(t) = p_k^\circ(t) + \alpha\, \hat\eta_k(t)$$

$$\delta S = \left.\frac{dS}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha \quad \text{und z.B.} \quad \delta q_k = \left.\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha$$

$$= \eta_k(t)$$

Zurück zu (*)

$$F = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \;;\; \frac{\partial F}{\partial \dot q_k} = p_k$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

hier kann man partiell integrieren!

aus (*) folgt:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \overbrace{p_k \delta \dot{q}_k} + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right) \right) \qquad (**)$$

Zweiter Term:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, p_k \delta \dot{q}_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \, p_k \frac{d}{dt} \delta q_k$$

$$= \underbrace{\cancel{\left[p_k \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}}}_{\text{Null weil}} - \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{d}{dt} p_k}_{\dot{p}_k} \delta q_k$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta q_k(t_1) = 0 \\ \delta q_k(t_2) = 0 \end{array} \right\} \text{muß so sein, weil } \begin{array}{l} q_k(t_1) = \text{const} \\ q_k(t_2) = \text{const} \end{array}$$

einsetzen in (**)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \dot{p}_k \delta q_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right) \right)$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \delta S = \int dt \left(\sum_{k=1}^{f} \left(-\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right) \right) \overset{!}{=} 0$$

Das muß unabhängig für jede beliebige ~~...~~ Variation δq_k und δp_k gelten!

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k = 0 \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

und $\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} .$$

II. 14. Kanonische Transformationen

Hintergrund: Im Lagrange-Formalismus gibt es eine sogenannte „Forminvarianz"

d.h. die Wahl der generalisierten Koordinaten ist nicht eindeutig

$\{q_k\} \longleftrightarrow \{Q_k\}$

umkehrbar eindeutige Transformation

„Forminvarianz"

läßt die Lagrange'schen BWGL und damit „die Physik" invariant!

d.h. $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = 0$ mit $\tilde{L} = L(\{q_k(Q_j, t)\}, \{\dot{q}_k(Q_j, t)\}, t)$"

Wichtig für den Hamilton-Formalismus:

Eine solche Transformation der generalisierten Koordinaten ändert auch die kanonisch konjugierten Impulse

$$P_k = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}$$

Frage nun:
Unter welchen Transformationen
$(\{q_k\}, \{p_k\}) \Rightarrow (\{Q_k\}, \{P_k\})$ sind die Hamilton'schen BWGL „kovariant"?

D.h., für welche Transformationen folgt mit $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

auch $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$, $\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$

$\Rightarrow$ „Kanonische Transformationen" !

Motivation für solche Transformationen

Sei in der Lagrange-Funktion die Variable q_k eine zyklische Variable, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Lagrange-BWGL.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\left(\text{aber nicht } \frac{d}{dt}\dot{q}_k \overset{!}{=} 0\right)$$

d.h. im Lagrange-Formalismus muß $\dot{q}_k$ weiter als Variable „mitgeschleppt" werden!

Anders im Hamilton-Formalismus

Variable q_k zyklisch $\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{p_k}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} = 0 \Rightarrow p_k$ ist Erhaltungsgröße

Anders ausgedrückt:

q_k zyklisch $\Longleftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

$\Downarrow$

es gilt auch $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$

d.h. q_k ist auch zyklisch im Hamilton-Formalismus

$\dot{p}_k = \cancel{\text{const}}\ 0$

d.h. p_k kann ersetzt werden durch eine Konstante α_k

$\Longrightarrow$ Das Hamilton'sche System hat also nur $f-1$ Freiheitsgrade

$$H = H(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots q_f,$$
$$p_1, \ldots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \ldots, p_f)$$

also $f-1$ Koordinaten und $f-1$ Impulse

$+ 1$ Konstante

Idee nun:

Lösung eines mechanischen Problems, in dem man schrittweise durch geeignete (d.h. kanonische) Transformationen $q \to Q$ möglichst viele Variablen zu zyklischen Variablen macht!

besser Fall:

Alle Variablen Q_k zyklisch

$$\Rightarrow H = H(P_1, \dots, P_f, t)$$

mit $P_k = \alpha_k = \text{const}$!

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}$$ hängt höchstens noch von der Zeit abhängen (falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

falls speziell $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\dot{Q}_k = \text{const} \Longrightarrow Q_k = \underbrace{a_k t + b_k}_{\text{aus Anfangsbedingung}}$$

Bedingung für kanonische Transformationen

Zur Erinnerung: kanonische Transformationen lassen die Hamilton'schen BWGL (form-) invariant!

$$\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{Q_k\},\{P_k\}$$

$$H(\{q_k\},\{p_k\},t) \longrightarrow \hat{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t)$$

(mit $\hat{H}$ entspricht H mit den neuen Variablen

d.h. $\hat{H} = H(\{q_k\{Q_k\}\},\{p_k\{P_k\}\},t)$)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right) = 0 \qquad (1)$$

es muß auch gelten

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t) \right) = 0 \qquad (2)$$

---

mit

$$\tilde{H} = H\left(\{q_k(\{Q_k\},\{P_k\},t)\}, \{p_k(\{Q_k\},\{P_k\},t)\}, t \right)$$

Wir behaupten:

(1) und (2) sind äquivalent,

falls

$$\boxed{\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k P_k - \tilde{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t) + \frac{d}{dt} M_1} \qquad (*)$$

wobei $M_1 = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$. Diese Funktion M_1 heißt „Erzeugende" der kanonischen Transformation

Zeige später:
Es gibt vier verschiedene
Möglichkeiten für die erzeugende
Funktion M (diese gehen durch Legendre-
Transformationen auseinander hervor)