Kanonische Transformationen

$$(\{q_k\}, \{p_k\}) \longrightarrow (\{Q_k\}, \{P_k\})$$

Unter welche Bedingungen läßt eine solche Transformation die Hamilton'schen Gleichungen „forminvariant"?

(D.h. $\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

$\rightarrow \dot Q_k = \frac{\partial \bar H}{\partial P_k}$, $\dot P_k = -\frac{\partial \bar H}{\partial Q_k}$)

$\Rightarrow$ Definition der kanonischen Transformation

Motivation: z.B. Vorhandensein von zykl. Koordinaten Q_k $\frac{\partial H}{\partial Q}$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \rightarrow \dot P_k = 0 \;!$$

$$\Leftrightarrow P_k = \text{const}$$

$$\Rightarrow \dot Q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \text{const} \;!$$

Annahme: alle Koordinaten sind zykl., d.h. alle $P_k = \text{const}$

$$\Rightarrow Q_k = a_k t + b_k$$

Konstanten aus den Anfangsbedingungen!

Bedingungen für kanonische Transformationen:

Die Hamiltonschen BWGL folgen aus dem modifizierten Hamiltonschen Prinzip

(1) $$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\},\{p_k\},t) \right) = 0$$

man variiert nach $\{q_k\}$, $\{p_k\}$
mit $q_k(t_1) = \text{const}$
$q_k(t_2) = \text{const}$

(2) $$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H}(\{Q_k\},\{P_k\},t) \right) = 0$$

Behauptung:
(1) und (2) sind „äquivalent"
wenn

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - H = \sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k P_k - \overline{H} + \frac{dM_1}{dt} \quad (*)$$

mit $M_1 = M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$ „Erzeugende" der Transformation

<u>Vorgehen</u>:

a) Zeige zunächst (mit Hilfe von (*)), daß die Erzeugende die eindeutige Zuordnung $\{q_k\}, \{p_k\} \rightarrow \{Q_k\}, \{P_k\}$ liefert

$$M_1 = M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$$

$\Rightarrow$ totales zeitl. Differential:

$$\frac{dM_1}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Einsetzen in (*)

$$\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H = \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\dot{Q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{f}\left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{f}\left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\right)\dot{Q}_k + H - \bar{H} + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{f}\left[\left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k - \left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\right)\dot{Q}_k\right] + \bar{H} - H - \frac{\partial M_1}{\partial t} = 0$$

Wie in der Erzeugenden M_1 sind hier jetzt $\{q_k\}$ und $\{Q_k\}$ als unabhängige Variable zu betrachten

$\Rightarrow$ Jeder Koeffizient vor $\dot{q}_k$ und $\dot{Q}_k$ muß verschwinden!

D.h. $p_k - \dfrac{\partial M_1}{\partial q_k} = 0$; $P_k + \dfrac{\partial M_1}{\partial Q_k} = 0$; $\bar{H} = H + \dfrac{\partial M_1}{\partial t}$

Umschreiben der beiden ersten

Gleichungen

$$p_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} = \frac{\partial M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{\partial q_k}$$

Zusammenhang $p_k \Longleftrightarrow \{q_k\},\{Q_k\}$

auflösen nach $Q_k \longleftrightarrow \{q_k\},\{p_k\}$

(unter der Voraussetzung, dass Zusammenhänge invertierbar sind!)

~~kom~~ Kombiniere das mit

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = -\frac{\partial M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{\partial Q_k} \overset{\text{Zusammenhang}}{\Longrightarrow} P_k = P_k(\{q_k\},\{p_k\},t)$$

nächster Schritt:

b) Zeige nun, dass mit

$M_1 = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$ ~~tatsächlich~~

eine kanonische Transformation vorliegt!

D.h. dass aus ① die Gleichung ② folgt

Erinnerung:

① $$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H \right)$$

$$\overset{\circledast}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \frac{dM_1}{dt} \right)$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_k P_k \dot{Q}_k - \bar{H} \right)$$

$$+ \delta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dM_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)}{dt}}_{M_1(\{q_k(t_2)\}, \{Q_k(t_2)\}, t_2) - M_1(\{q_k(t_1)\}, \{Q_k(t_1)\}, t_1)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \delta P_k \dot{Q}_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \delta P_k \right)$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k(t_2) - \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k(t_1)} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\delta q_k(t_1) = \cancel{\delta q_k} \; \delta q_k(t_2) = 0 \quad !$$

(~~alle~~ alle Koordinaten bleiben an den Randpunkten des Integrals konstant)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k \delta P_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k} \delta P_k \right) + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Zweiter Term auf der rechten Seite kann partiell integriert werden!

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, P_k \delta \dot{Q}_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \, P_k \frac{d}{dt} \delta Q_k$$

$$= P_k \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt \, \dot{P}_k \delta Q_k$$

Einsetzen:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \left[\left(\dot{Q}_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \right) \delta P_k - \left(\dot{P}_k + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right] \right) + \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} + P_k \right) \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

In Schritt a) hatten wir gesehen:

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \quad !$$

(das ist eine der Transformationsgleichungen!)

d.h. $\sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} + P_k \right) \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0!$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} \left(\dot{Q}_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \right) \delta P_k + \left(\dot{P}_k + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right)$$

Betrachte nun die $\{Q_k\}$ und $\{P_k\}$ als neue, unabhängige Variable!

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \quad !$$

Hamilton'sche BWGL in den neuen Variablen!

Betrachte nun weitere Formen der erzeugenden Funktion!

Unterziehe dazu die Erzeugende $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$

einer Legendre-Transformation bzgl. der $\{Q_k\}$

$$\mathcal{L}\, M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t) = \sum_{k=1}^{f} Q_k \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}}_{-P_k} - M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$$

man definiert:

$$M_2 = -\mathcal{L} M_1 = M_1 + \sum_{k=1}^{f} Q_k P_k$$

neue Erzeugende

$$= M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$$

Um zu zeigen, dass die Variablen von M_2 tatsächlich $\{q_k\}, \{P_k\}, t$ sind, betrachte das Differential:

$$dM_2 = dM_1 + \sum_{k=1}^{f} dQ_k P_k + Q_k dP_k$$

was ist dM_1?

Errinnerung an Schritt a)

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{d}{dt} M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$$
$$= \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial t}}_{\bar{H} - H} + \sum_k \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_k}}_{p_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}}_{-P_k} \dot{Q}_k$$

$$\Rightarrow \frac{dM_1}{dt} = \bar{H} - H + \sum_{k=1}^{f} (p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k)$$

$$\Leftrightarrow dM_1 = (\bar{H} - H)\,dt + \sum_{k=1}^{f} (p_k\, dq_k - P_k\, dQ_k)$$

einsetzen in das Differential für M_2:

$$dM_2 = dM_1 + \sum_{k=1}^{f} (dQ_k\, P_k + Q_k\, dP_k)$$

$$= (\bar{H} - H)\,dt + \sum_{k=1}^{f} \left(p_k\, dq_k + \cancel{P_k\, dQ_k} - \cancel{P_k\, dQ_k} + Q_k\, dP_k\right)$$

$$\Rightarrow dM_2 = \sum_{k=1}^{f} (p_k\, dq_k + Q_k\, dP_k) + (\bar{H} - H)\,dt$$

d.h. die Variablen von M_2 sind tatsächlich $\{q_k\}, \{P_k\}, t$

Außerdem:

Vergleiche den gerade hergeleiteten Ausdruck für dM_2 mit dem Ausdruck

$$dM_2 = d\,M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$$
$$= \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial M_2}{\partial q_k}\,dq_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k}\,dP_k\right) + \frac{\partial M_2}{\partial t}\,dt \;\overset{!}{\cdot}$$

(bzw. vergleiche die Koeffizienten von dq_k, dP_k, dt)

man erhält:

$$\left.\begin{aligned} p_k &\overset{!}{=} \frac{\partial M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)}{\partial q_k} \\ Q_k &\overset{!}{=} \frac{\partial M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)}{\partial P_k} \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} &\overset{!}{=} \bar{H} - H \end{aligned}\right\}$$

„explizite" Transformationsgleichungen $\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{Q_k\},\{P_k\}$

Die beiden weiteren Erzeugenden M_3, M_4 erhält man durch weitere Legendre-Transformation

$\Longrightarrow$ morgen