$M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$

$$p_k = \frac{\partial M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{\partial q_k}$$

$$\longrightarrow p_k(\{q_k\},\{Q_k\},t) \xrightarrow{\text{auflösen}} Q_k$$

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = P_k(\{q_k\},\{Q_k\},t)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

---

weitere Erzeugende

$$M_2(\{q_k\},\{P_k\},t) = -\mathcal{L} M_1$$
$$= -\left(\sum_{k=1}^{f} Q_k \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} - M_1\right) = M_1 + \sum_k Q_k P_k$$

Vergleich der Differentiale

einerseits

$$dM_2 = \sum_k \left(p_k\, dq_k + Q_k\, dP_k\right) + (\bar{H} - H)\, dt$$

andererseits:

$$dM_2 = \sum_k \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k} dP_k\right) + \frac{\partial M_2}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \quad p_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_2}{\partial q_k}, \quad Q_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_2}{\partial P_k}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial t} \overset{!}{=} \bar{H} - H$$

Weitere Erzeugende

1) $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$
2) $M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$
3) $M_3(\{p_k\},\{Q_k\},t)$ Legendre-Transformierte von M_1 bzgl. $\{q_k\}$

Betrachtung des Differentials von M_3

$$\Rightarrow \quad q_k = -\frac{\partial M_3}{\partial p_k}; \quad P_k = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_k}$$

$$\bar{H} - H = \frac{\partial M_3}{\partial t}$$

4) $M_4(\{p_k\},\{P_k\},t) = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t) - \sum_k \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_k}}_{p_k} q_k - \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}}_{-P_k} Q_k$

Legendre-Transformierte von M_1 bzgl. der beiden Variablensätze $\{q_k\}$ und $\{Q_k\}$!

$$\Rightarrow \quad q_k = -\frac{\partial M_4}{\partial p_k}; \quad Q_k = \frac{\partial M_4}{\partial P_k}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial M_4}{\partial t}$$

Beispiele

1) Wähle als Erzeugende

$$M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t) = -\sum_{k=1}^{f} q_k Q_k \qquad \left(\frac{\partial M_1}{\partial t}=0\right)$$

$$\Rightarrow \bar{H} = H$$

$$p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k} = -Q_k$$

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = q_k$$

also $(\{q_k\},\{p_k\}) \longrightarrow (\{P_k\},\{-Q_k\})$

Das heißt, wir haben eine Vertauschung von ~~Orte~~ Koordinaten und Impulsen erreicht!

Bemerkung:

Diese Vertauschung ginge auch mit

$$M_4(\{p_k\},\{P_k\},t) = -\sum_{k=1}^{f} p_k P_k \qquad \left(\frac{\partial M_4}{\partial t}=0\right)$$

$$q_k \overset{!}{=} -\frac{\partial M_1}{\partial p_k} = P_k$$

$$Q_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial P_k} = -p_k$$

man sieht hier bereits:

Die Koordinaten und Impulse sind in der Hamilton-Mechanik gleichbedeutende Variablen

(plus Symmetrie in den BWGL

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \;)$$

Beispiel 2)

Wähle als Erzeugende $M_2(\{q_k\}, \{P_k\}, t)$

$$= \sum_{k=1}^{f} q_k P_k$$

wir wissen: $p_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_2}{\partial q_k} = P_k$ „Identische Transformation"

$$Q_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_2}{\partial P_k} = q_k$$

(dasselbe ginge auch mit $M_3(\{p_k\}, \{Q_k\}, t) = -\sum_{k=1}^{f} p_k Q_k$

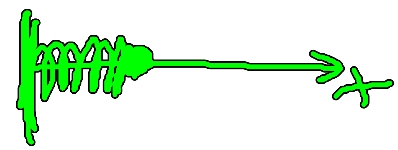
Beispiel 3) Harmonische Oszillator

Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$q = x$



Wähle als Erzeugende

$$M_1(q,Q) = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q$$

Transformationsgleichungen

$$p \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$$

$$P \stackrel{!}{=} -\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \frac{m}{2}\omega \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}}$$

daraus folgt:

$$q^2 = \frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q \Longleftrightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\sin Q = q(Q,P)$$

einsetzen in die Gleichung für p:

$$p = m\omega q \cot Q = m\omega\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\cos Q = p(Q,P)$$

Hamiltonfunktion:

$$\bar{H} = H + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial t}}_{0}$$

$$= H = \frac{\left(p(Q,P)\right)^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\left(q(Q,P)\right)^2$$

$$= \frac{\cancel{2m}\omega P}{\cancel{2m}}\cos^2 Q + \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\omega^2\frac{\cancel{2}P}{\cancel{m}\omega}\sin^2 Q$$

$$= \omega P\big(\underbrace{\cos^2 Q + \sin^2 Q}_{1}\big)$$

$$\boxed{\bar{H} = \omega P}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0 \quad !$$

d.h. Q ist zyklische Koordinate

Damit folgt sofort:

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$\Rightarrow P = \text{const} = \alpha$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \beta$$

Konstante aus der Anfangsbedingung!

Für die ursprüngliche Koordinate q (Auslenkung!) folgt dann:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

entsprechend:

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

$$= \sqrt{2\alpha m\omega} \cos(\omega t + \beta)$$

Dieses Beispiel verdeutlicht, daß man mechanische Probleme (im Hamilton-Formalismus) durch Durchführung kanonischer Transformationen vereinfachen kann!

→ man macht die Koordinate(n) zu einer zykl. Koordinate!

II.15 Symplektische Struktur des Phasenraums

Motivation:

Kanon. Transformation → Koordinaten und Impulse können vertauscht werden

→ Koordinaten und Impulse sind im Hamiltonformalismus nicht voreinander ausgezeichnet!

Verdeutliche diese Symmetrie nun durch eine neue Notation

Betrachte zunächst ein System mit $f = 1$

$f=1 \Rightarrow$ Phasenraum ist zweidimensional

Hamilton-Variablen : q, p

Führe folgende Vektoren ein:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{H}_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Vektor im 2-dimensionalen Phasenraum

enthält die partiellen Ableitungen von H

Führe noch folgende Matrix ein: $\underline{\underline{J}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Damit lassen sich die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

wie folgt formulieren.

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x \Longleftarrow \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Einige Eigenschaften der Matrix $\underline{\underline{J}}$:

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{J}}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(.)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\det \underline{\underline{J}} = 1$$

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{J}}^{T} = -\underline{\underline{J}}$$

Es folgt:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H_x} \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{J}}^{-1}}_{-\underline{\underline{J}}} \underline{\dot{x}} = \underbrace{\underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \underline{\underline{J}}}_{\underline{\underline{1}}}\, \underline{H_x}$$

BWGL

$$\Rightarrow \underline{H_x} = -\underline{\underline{J}}\, \underline{\dot{x}}$$

außerdem

$$\underline{\underline{J}}^{2} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}\left(-\underline{\underline{J}}^{-1}\right) = -\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{1}}$$

Verallgemeinerung auf mehrere Freiheitsgrade $(f > 1)$

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

2f-dimensionale Vektoren

$$\underline{\underline{J}} := \left(\begin{array}{c|c} \underline{0}_{f\times f} & \underline{1}_{f\times f} \\ \hline -\underline{1}_{f\times f} & \underline{0}_{f\times f} \end{array} \right) \qquad 2f \times 2f \text{ Matrix}$$

⇒ kanonische Gleichungen:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{H}_x$$

Beispiel zur Anwendung der neuen Notation:

Betrachte „autonomes", „lineares System mit $f = 1$

H hängt nicht explizit von der Zeit ab

$\underline{H}_x$ ist linear in den Variablen!

Das impliziert folgendes „Aussehen' der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}\left(a q^2 + 2 b p q + c p^2\right)$$

verallgemeinerter harmonischer Oszillator!

(gewöhnl. Oszillator:

$$b = 0$$

$$c = \frac{1}{m}$$

$$a = m \omega^2)$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{H_x}$$

also $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aq + bp \\ bq + cp \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} bq + cp \\ -aq - bp \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} \quad \text{mit } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} b & c \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Konstanten

$\Rightarrow$ Linearität !

Kanonische Transformation in kompakter Notation !?

Erinnerung: Es gibt 4 verschiedene Erzeugende mit dazugehöriger Transformationsgleichungen

a) $M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$

$$p_m \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q_m} = p_m(\{q_k\}, \{Q_k\}, t) \qquad (1)$$

$$P_m \stackrel{!}{=} -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m} = P_m(\{q_k\}, \{Q_k\}, t) \qquad (2)$$

Damit (1) nach den $\{Q_k\}$ auflösbar ist, muß gelten:

$$\frac{\partial p_m}{\partial Q_n} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_n \partial q_m} \neq 0 \quad !$$

$$\underset{\uparrow \atop ②}{=} - \frac{\partial P_n}{\partial q_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_m}{\partial Q_n} = - \frac{\partial P_n}{\partial q_m}} \quad (\neq 0) \quad !$$

*a

Analoge Gleichungen folgen ~~für~~ aus den Erzeugenden!

b) $M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$

man findet: $$\boxed{\frac{\partial p_m}{\partial P_k} \overset{!}{=} \frac{\partial Q_k}{\partial q_m}} \quad (*b)$$

$\neq 0$

c) $M_3(\{p_k\},\{Q_k\},t)$ $$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q_m}{\partial Q_k} \overset{!}{=} \frac{\partial P_k}{\partial p_m} \quad (*c)}$$

d) $M_4(\{p_k\},\{P_k\},t)$ $$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q_m}{\partial P_k} \overset{!}{=} -\frac{\partial Q_k}{\partial p_m} \quad (*d)}$$

Wir benutzen jetzt die neue Notation

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

transformierte Koordinaten und Impulse

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = \left(\underline{\underline{M}}\right)_{\alpha\beta}$$

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, 2f$$

man kann zeigen:

$$\boxed{\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}} \, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}}$$

entspricht (*a) – (*d) !