

Wiederholung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}} \underline{H}_x$$

Kompakte Notation  
der Hamiltonsche  
ZwGC

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

2f-dimensional  $f \times f$  Einheitsmatrix

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$$

$f \times f$  Matrix

Zusammenhang mit kanonischen  
Transformate

es gibt 4 Erzeugende

z.B.  $M_1 (q_1, p_1)$

muß erfüllen:

$$p_m = \frac{\partial M_1}{\partial q_m}, \quad P_m = -\frac{\partial M_1}{\partial p_m}$$

Kombination:  $\frac{\partial p_m}{\partial q_n} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial q_n \partial q_m} = -\frac{\partial P_n}{\partial p_m}$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial p_m}{\partial q_n} = -\frac{\partial P_n}{\partial p_m} \right) \quad *a$$

$\neq 0$

$\Rightarrow$  Zusammenhängende  
Mischtermbat

analog:  $\frac{\partial p_m}{\partial P_n} = \frac{\partial q_n}{\partial p_m} \quad *b$

$\therefore \Rightarrow *c, *d$

führe ein:  $\gamma = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$

2f-dimensionale  
Vektore

transformierte  
Koordinate  
und Impulse

$$\left( \underline{M} \right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, 2f$$

2f x 2f - Matrix

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

entsprechend

$$\underline{\underline{(M^{-1})}}_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

Mit diesen Definitionen lassen sich die Relationen  $(*)a) - (*)d)$  wie folgt zusammenfassen:

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{zf} \sum_{\nu=1}^{zf} J_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} \underline{\underline{(M^{-1})}}_{\nu\mu}$$

umschreiben

benutze:  $\sum_{\nu=1}^{zf} J_{\beta\nu} \underline{\underline{(M^{-1})}}_{\nu\mu} = \underline{\underline{(JM^{-1})}}_{\beta\mu}$

$$= \underline{\underline{(JM^{-1})}}_{\mu\beta}^T$$

$$\Rightarrow M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} J_{\alpha\mu} \underline{\underline{(JM^{-1})}}_{\mu\beta}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{(JM^{-1})}}^T \quad (**)$$

Wie kann man sehen, dass das stimmt?

Betrachte explizit die linke und rechte Seite von (\*\*)

$$\left( \underline{\underline{M}} \right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\underline{\underline{M}} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \hline \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{array} \right)$$

f x f Matrizen

z.B.  $\left( \frac{\partial q}{\partial P} \right)_k = \frac{\partial q_k}{\partial P_l}$   
 $k, l = 1, \dots, f$

Rechte Seite

$$\left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline \underline{\underline{-1}} & \underline{\underline{0}} \end{array} \right)$$

$\underline{\underline{J}}$

$$\left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline \underline{\underline{-1}} & \underline{\underline{0}} \end{array} \right)$$

$\underline{\underline{J}}$

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \hline \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array} \right)$$

$\underline{\underline{M^{-1}}}$

$$\left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline \underline{\underline{-1}} & \underline{\underline{0}} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \hline -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \end{array} \right)^T$$

$$\left( \underline{\underline{M^{-1}}} \right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{-1} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \\ \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix}$$

J

D.h. die rechte Seite von  $**$  wird zu

$$\dots = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix}$$

Erinnere uns: Die linke Seite von  $**$  war

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial p} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial p} \end{pmatrix}$$

vergleiche explizit z.B. den linken oberen Block:

$$\left( \frac{\partial q}{\partial Q} \right)_{kl} = \left( \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^T \right)_{kl}$$

d.h.  $\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial P_l}{\partial p_k}$

$$\boxed{\left( \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \right)^T = \frac{\partial P_l}{\partial p_k}}$$

Das entspricht genau  $\ast a$

Das heißt, es gilt tatsächlich

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} (\underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1})^T$$

Formuliere diese Matrixgleichung noch etwas um:

Multipliziere von links mit  $\underline{\underline{J}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}^2 (\underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1})^T$$

benutze:  $\underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{1}}$  !

$$= -(\underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1})^T$$

$$= -(\underline{\underline{M}}^{-1})^T \underline{\underline{J}}^T$$

$$\boxed{(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T}$$

benutze:  $\underline{J}^T = \underline{J}^{-1} = -\underline{J}$

$$= (\underline{M}^{-1})^T \underline{J}$$

Multipliziere von links mit  $\underline{M}^T$

$$\begin{aligned} \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} &= \underline{M}^T (\underline{M}^{-1})^T \underline{J} \\ &= (\underbrace{\underline{M}^{-1} \underline{M}}_{\underline{1}})^T \underline{J} = \underline{1}^T \underline{J} \\ &= \underline{J} \end{aligned}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_\nu}{\partial y_\nu}}_{\underline{M}_{\nu\nu}} \underbrace{\frac{\partial y_\nu}{\partial x_\nu}}_{(\underline{M}^{-1})_{\nu\nu}} = d_{\text{ap}}$$

$$\Rightarrow \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$$

$\underline{M}$ : Matrix der 2 Ableitungen der Erzeugenden der kanonischen Transformation

Man sagt auch:

Die Matrix  $\underline{J}$  bleibt invariant unter einer kanonischen Transformation!

$\underline{J}$  heißt in diesem Zusammenhang auch

"Metrik" im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum  
 bzw. "metrische Tensor" !

Bemerkungen

i) Zur Rolle von  $\underline{J}$  als metrische Tensor:  
 Man kann ein "symplektisches Skalarprodukt" definieren

$$(\underline{x}, \underline{y}) := \underline{x}^T \underline{J} \underline{y} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2f} x_{\alpha} J_{\alpha\beta} y_{\beta}$$

$\nearrow \nearrow$   
 Vektoren im  
 $2f$ -dimensionalen  
 Phasenraum

Vergleiche mit "gewöhnlichem" Skalarprodukt  
 $\underline{a}, \underline{b}$  Vektoren im dreidimensionalen Raum

$$(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \underline{a}^T \underline{g} \underline{b} \quad \text{mit } \underline{g} = \underline{1} !$$

$\nearrow$   
 metrische Tensor im  
 dreidimensionalen Raum!



Was passiert mit dem symplektischen Skalarprodukt unter einer kanonischen Transformation?

$$(\underline{x}', \underline{y}') \quad \text{mit} \quad \underline{x}' = \underline{M} \underline{x}$$

$$\underline{y}' = \underline{M} \underline{y}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left( \underbrace{\underline{M} \underline{x}}_{\underline{x}'} , \underbrace{\underline{M} \underline{y}}_{\underline{y}'} \right) &= \underline{x}'^T \underline{J} \underline{y}' \\ &= \underline{x}^T \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} \underline{y} = \underline{x}^T \underline{J} \underline{y} = (\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

Invarianz von  $\underline{J}$  unter der kanon. Transformation!

<sup>Fazit:</sup>  
Die Invarianz der kanonischen Gleichungen  $(\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H}_x)$  unter kanonischen Transformation entspricht auf formaler Ebene einer „symplektischen“ Struktur des Phasenraums

---

II.16 Poisson-Klammern

Jede mechanische "Observable" wie z.B. Energie, Drehimpuls etc. lässt sich als Phasenfunktion  $g(q_u, p_u, t)$  darstellen

Betrachte die Zeitentwicklung einer solchen Observable:

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{u=1}^f \left( \frac{\partial g}{\partial q_u} \dot{q}_u + \frac{\partial g}{\partial p_u} \dot{p}_u \right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

benutze:  $\dot{q}_u = \frac{\partial H}{\partial p_u}$ ,  $\dot{p}_u = -\frac{\partial H}{\partial q_u}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt} = \sum_{u=1}^f \left( \frac{\partial g}{\partial q_u} \frac{\partial H}{\partial p_u} - \frac{\partial g}{\partial p_u} \frac{\partial H}{\partial q_u} \right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

= :  $\{g, H\}$   
Poisson-Klammer

Definition:

Für zwei beliebige stabile Observablen,

$f(q_u, p_u, t)$  und

$g(q_u, p_u, t)$  wird die Poisson-Klammer wie

folgt definiert:

$$\{f, g\} := \sum_{\mu=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial g}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\mu}} \frac{\partial g}{\partial q_{\mu}} \right)$$

---

~~dt~~ Kontinuität für die Zeitentwicklung von  $g$ :

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Folgerung:

Für nicht explizit zeitabhängige

Observablen gilt:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}$$

$\Rightarrow$  Falls also ~~dt~~  $\{g, H\} = 0$ , dann ist  $g$  eine Erhaltungsgröße!