Wiederholung

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\,\underline{H}_{\underline{x}}$$

Kompakte Notation der Hamiltonschen BWGL

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \; ; \; \underline{H}_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

2f - dimensional

$$\underline{\underline{J}} = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \overbrace{\underline{\underline{1}}}^{f\times f \text{ Einheitsmatrix}} \\ \hline -\underline{\underline{1}} & \underbrace{\underline{\underline{0}}}_{f\times f \text{ Matrix}} \end{array}\right)$$

Zusammenhang mit kanonischen Transformationen es gibt 4 Erzeugende

z.B. $M_1(\{q_k\},\{Q_k\})$

muss erfüllen: $p_m = \frac{\partial M_1}{\partial q_m}$ , $P_m = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m}$

Kombinieren: $\frac{\partial p_m}{\partial Q_n} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_n \partial q_m} = -\frac{\partial P_n}{\partial q_m}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_m}{\partial Q_n} = -\frac{\partial P_n}{\partial q_m}}$ *a $\neq 0$ $\Rightarrow$ Zusammenhangs-invertierbar

analog: $\frac{\partial p_m}{\partial P_n} = \frac{\partial Q_n}{\partial q_m}$ *b

$\vdots \Rightarrow$ *c , *d

führe ein: $Y = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$ transformierte Koordinaten und Impulse

2f-dimensionaler Vektor

$(\underline{M})_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial Y_\beta}$ $\alpha, \beta = 1, \ldots, 2f$

2f×2f-Matrix

$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

entsprechend

$$\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$$

Mit diesen Definitionen lassen sich die Relation (*a) – (*d) wie folgt zusammenfassen.

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{2f} \sum_{\nu=1}^{2f} J_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} \left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)_{\nu\mu}$$

umschreiben

benutze: $\sum_{\nu=1}^{2f} J_{\beta\nu} \left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)_{\nu\mu} = \left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)_{\beta\mu}$

$$= \left(\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T\right)_{\mu\beta}$$

$$\Rightarrow M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} J_{\alpha\mu} \left(\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T\right)_{\mu\beta}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} \left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \qquad (*f)$$

Wie kann man sehen, daß das stimmt?

Betrachte explizit die linke und rechte Seite von (**)

$$(\underline{\underline{M}})_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\underline{\underline{M}} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \hline \frac{\partial p}{\partial Q} & \underbrace{\frac{\partial p}{\partial P}}_{f \times f \text{ Matrizen}} \end{array}\right)$$

z.B. $\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_{kl} = \frac{\partial q_k}{\partial P_l}$

$k, l = 1, \ldots, f$

Rechte Seite

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{array}\right)}_{\underline{\underline{J}}} \left( \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{array}\right)}_{\underline{\underline{J}}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \hline \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array}\right)}_{\underline{\underline{M}}^{-1}} \right)^T$$

$$\boxed{(\underline{\underline{M}}^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \hline -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \end{array}\right)^T$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{J}}} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \\ \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix}$$

D.h. die rechte Seite von (**) wird zu

$$\ldots = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \end{pmatrix}$$

Erinnerung: Die linke Seite von (**) war

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

vergleiche explizit z.B. den linken oberen Block :

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{kl} = \left(\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T\right)_{kl}$$

d.h. $$\frac{\partial q_k}{\partial x_l} = \frac{\partial P_l}{\partial p_k}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l}\right)^T = \frac{\partial P_l}{\partial q_k}}$$

Das entspricht genau *a

Das heißt, es gilt tatsächlich

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

Formuliere diese Matrixgleichung noch etwas um:

Multipliziere von links mit $\underline{\underline{J}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}^2\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

benutze: $\underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{1}}$ !

$$= -\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

$$\boxed{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T}$$

$$= -\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \underline{\underline{J}}^T$$

benutze: $\underline{\underline{J}}^T = \underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{J}}$

$$= (\underline{\underline{M}}^{-1})^T \underline{\underline{J}}$$

Multipliziere von links mit $\underline{\underline{M}}^T$

$$\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T (\underline{\underline{M}}^{-1})^T \underline{\underline{J}}$$

$$= \underbrace{(\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{M}})}_{\underline{\underline{1}}}{}^T \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{1}}^T \underline{\underline{J}}$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\nu}}_{\underline{\underline{M}}_{\alpha\nu}} \underbrace{\frac{\partial y_\nu}{\partial x_\beta}}_{(\underline{\underline{M}}^{-1})_{\nu\beta}} = \delta_{\alpha\beta}}$$

$$= \underline{\underline{J}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}}$$

$\underline{\underline{M}}$ : Matrix der 2. Ableitungen der Erzeugenden der kanonischen Transformation

Man sagt auch:

Die Matrix $\underline{\underline{J}}$ bleibt invariant unter einer kanonischen Transformation!

$\underline{\underline{J}}$ hilft in diesem Zusammenhang auch

„Metrik" im 2f-dimensionalen Phasenraum

(„bzw. „metrische Tensor" !

Bemerkungen

i) Zur Rolle von $\underline{\underline{J}}$ als metrischer Tensor:

Man kann ein „symplektisches Skalarprodukt" definieren

$$(\underline{x},\underline{y}) := \underline{x}^T \underline{\underline{J}}\,\underline{y} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2f} x_\alpha J_{\alpha\beta}\, y_\beta$$

Vektoren im 2f-dimensionalen Phasenraum

Vergleich mit „gewöhnlichem" Skalarprodukt

$\underline{a}$, $\underline{b}$ Vektoren im drei-dimensionalen Raum

$$(\underline{a},\underline{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \underline{a}^T \underline{\underline{g}}\,\underline{b} \quad \text{mit } \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{1}} \;!$$

metrische Tensor im dreidimensionalen Raum!

Was passiert mit diesem symplektischen Skalarprodukt unter einer kanonischen Transformation?

$(\underline{x}', \underline{y}')$ mit $\underline{x}' = \underline{\underline{M}}\,\underline{x}$

$\underline{y}' = \underline{\underline{M}}\,\underline{y}$

$$\to (\underbrace{\underline{\underline{M}}\,\underline{x}}_{\underline{x}'}, \underbrace{\underline{\underline{M}}\,\underline{y}}_{\underline{y}'}) = \underline{x}'^T \underline{\underline{J}}\,\underline{y}'$$

$$= \underline{x}^T \underbrace{\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{J}}}\,\underline{y} = \underline{x}^T \underline{\underline{J}}\,\underline{y} = (\underline{x}, \underline{y})$$

Invarianz von $\underline{\underline{J}}$ unter der kanon. Transformation!

Fazit: Die Invarianz der kanonischen Gleichungen ($\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\,\underline{H}_x$) unter kanonischen Transformationen entspricht auf formaler Ebene einer „symplektischen" Struktur des Phasenraums

---

## II.16 Poisson-Klammern

Jede mechanische "Observable" wie z.B. Energie, Drehimpuls etc. läßt sich als Phasenfunktion $g(\{q_\mu\},\{p_\mu\},t)$ darstellen

Betrachte die Zeitentwicklung einer solchen Observable:

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{\partial g}{\partial q_\mu}\dot q_\mu + \frac{\partial g}{\partial p_\mu}\dot p_\mu\right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

benutze: $\dot q_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}$, $\dot p_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt} = \underbrace{\sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{\partial g}{\partial q_\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu} - \frac{\partial g}{\partial p_\mu}\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\right)}_{=:\{g,H\}\ \text{Poissonklammer}} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Definition.

Für zwei beliebige skalare Observablen $f(\{q_\mu\},\{p_\mu\},t)$ und $g(\{q_\mu\},\{p_\mu\},t)$ wird die Poissonklammer wie folgt definiert:

$$\{f,g\} := \sum_{k=1}^{f} \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

---

~~dh.~~ Konkret für die Zeitentwicklung von $g$:

$$\frac{dg}{dt} = \{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Folgerung:

Für nicht explizit zeitabhängige Observablen gilt:

$$\frac{dg}{dt} = \{g,H\}$$

$\Rightarrow$ Falls also $\cancel{dg}\ \{g,H\} = 0$, dann ist $g$ eine Erhaltungsgröße!