

Poisson Klammern

Zwei Observablen $f(q, p, t)$
und $g(q, p, t)$

$$\{f, g\} := \sum_{n=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} \right)$$

Bemerkung:

Obige Definition ist konsistent mit den
Büchern von Goldstein und Nolting, während
bei Scheck ~~ist~~ die Reihenfolge vertauscht ist

Eigenschaften

i) Zeitentwicklung von g :

$$\boxed{\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}}$$

Falls also g nicht explizit zeitabhängig, d.h. $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{dg}{dt} = \{g, H\} \right.$$

falls $\{g, H\} = 0 \Rightarrow \frac{dg}{dt} = 0$ d.h. g ist Erhaltungsgröße!

(i) Spezialfälle für g

• $g = q_k \Rightarrow \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k = \{q_k, H\}$

$$q_k = \{q_k, H\}$$

$$= \sum_{m=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_m}}_0 \frac{\partial H}{\partial q_m} \right)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

entspricht der kanonische BUCG für q_k !

analog:

• $g = p_k$

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\} = \dots = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

(ii) Fundamentale Poisson-Klammern

$$\{q_k, q_l\} = 0$$

$$\{p_k, p_l\} = 0$$

$$\{q_k, p_l\} = \sum_{m=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_m}}_{\delta_{lm}} - \cancel{\frac{\partial q_k}{\partial p_m}} \cancel{\frac{\partial p_l}{\partial q_m}} \right)$$

$$= \delta_{kl}$$

• Diese Relation tauchen genauso auch in der Quantenmechanik auf!

Wir werden später zeigen, dass die Poisson Klammern invariant ist gegenüber kanonischen Transformationen!

(v) Poissonklammern können als symplektisches (Skalar-)Produkt im Phasenraum aufgefasst werden!

$$\{f, g\} = \sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_m} \frac{\partial g}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial g}{\partial q_m} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_f} \right) \left(\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{1} \\ \hline \underline{-1} & \underline{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow g_x$$

$$(\underline{f}_x)^T \quad \underline{J} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \underline{p}_f} \right)$$

$\underline{f}_x, \underline{g}_x$ sind Vektoren im
 $2f$ -dimensionalen Phasenraum

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{0}^{f \times f} & \overbrace{1}^{f \times f} \\ \hline \overbrace{-1}^{f \times f} & \overbrace{0}^{f \times f} \end{pmatrix}}_{\underline{J}} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_f} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

$\underline{g}_x \nearrow$

Zusammenfassung:

$$\{f, g\} = \underline{f}_x^T \underline{J} \underline{g}_x = \underbrace{(f_x, g_x)}_{\text{symplektisches Skalarprodukt}}$$

explizit:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \underline{f}_x^T \underline{J} \underline{g}_x \\ &= \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \sum_{\beta=1}^f \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \frac{\partial g}{\partial p_\beta} \underline{J} \frac{\partial g}{\partial x_\beta} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

Konsequenz für BNLG

$$\dot{\underline{x}}_y \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{aus (i)}}}{=} \left\{ \underline{x}_y, H \right\} \stackrel{\substack{\uparrow \\ *}}{=} \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}}_{\delta_{\alpha\beta}} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}}_y = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{y\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$$= \left(\underline{J} \underline{H}_x \right)_y$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H}_x$$

$$\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

entspricht unserem
früheren Ergebnis!

2) Die Poissonklammer ist invariant
unter einer kanonischen Transformation!

Kanon. Transformation

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \rightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

Wichtig in diesem Kontext:

$$\underline{M} \text{ mit } M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\underline{M}^{-1} \text{ mit } (\underline{M}^{-1})_{\kappa\lambda} = \frac{\partial y_\kappa}{\partial x_\lambda}$$

es gilt: $\boxed{\underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}}$ \underline{J} ist invariant

Zeige jetzt:

$$\{f, g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x)$$

$$= (\underline{f}_y, \underline{g}_y)$$

Benutze:

$$(\underline{f}_x)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \underbrace{\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_j}}_{(M^{-1})_{\alpha j}}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2f} \left(\underline{M}^{-1} \right)^T_{\alpha j} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}$$

Kettenregel

$$\Rightarrow \underline{f}_x = \left(\underline{M}^{-1} \right)^T \underline{f}_y \quad \longrightarrow \quad \underline{f}_x^T = \underline{f}_y^T \underline{M}^{-1}$$

$$\{f, g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x)$$

$$= \underline{f}_x^T \underline{J} \underline{g}_x$$

$$= \underline{f}_y^T \underline{M}^{-1} \underline{J} \left(\underline{M}^{-1} \right)^T \underline{g}_y$$

es gilt: $\underline{M}^{-1} \underline{J} \left(\underline{M}^{-1} \right)^T = \underline{J}$ (nächtste \bar{U} -Zelle)

$$\Rightarrow \{f, g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x) = \underline{f}_y^T \underline{J} \underline{g}_y = (\underline{f}_y, \underline{g}_y)$$

Wir zeigen schließlich:

Die Poissonklammern können als Kriterium für kanonische Transformationen verwendet werden!

genauer:

Die Transformation $(\{q_k, p_k\}) \rightarrow (\{Q_k, P_k\})$ ist dann kanonisch ^{wenn} die Fundamentale Poissonklammern gelten, d.h.

$$\{Q_k, P_l\} = \delta_{kl}$$
$$\text{und } \{Q_k, Q_l\} = \{P_k, P_l\} = 0$$

Betrachte dazu eine nicht explizit zeitabhängige Transformation
kanonisch

\Leftrightarrow Die Erzeugende M ist nicht explizit zeitabhängig
d.h. $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \bar{H} = H$$

d.h. die Hamiltonfunktion ist gleich wie vorher!

sei $y = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$ Invarianz unter Variablenwechsel

$$\dot{y}_\alpha = \{y_\alpha, \bar{H}\} = \{y_\alpha, H\} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial y_\beta}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \dot{y}_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_\beta} \\ &= \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_\beta}}_{\{y_\alpha, y_\delta\}} \end{aligned}$$

also $\dot{y}_\alpha = \sum_{\delta} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \{y_\alpha, y_\delta\} \quad (*)$

andereits wissen wir:

$$\dot{y}_\alpha = \left(\underline{J} \bar{H}_y \right)_\alpha = \sum_{\delta=1}^{2f} J_{\alpha\delta} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \quad (**)$$

Kanontische BWG

Vergleich von \circledast und $\circledast\circledast$:

$$\{y_\alpha, y_\beta\} \stackrel{!}{=} J_{\alpha\beta}$$

damit die Gleichungen
konsistent sind!

Erinnerung: $X = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{-1} & \underline{0} \end{pmatrix}$

$$\{Q_k, Q_l\} = 0$$

$$\{P_k, P_l\} = 0, \quad \text{aber } \{Q_k, P_l\} = \delta_{kl}$$

Poisson Klammern und Quantenmechanik (QM)

Übergang von der klassischen Mechanik
zur QM erfolgt mit Hilfe des
sogenannten Korrespondenzprinzips

$$g(q_{\text{kl}}, p_{\text{kl}}, t) \longrightarrow \hat{g} \text{ im Hilbertraum}$$

mechanische
Observable

speziell:

$H(q, p, t) \rightarrow \hat{H}$ Hamiltonoperator

z.B. Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega x^2 \rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega \hat{x}^2$$

Zeitentwicklung:

Kommutator

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{g}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}$$

Klass. Mechanik

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
 h Planck'sches
Wirkungsquantum

Kommutator:

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$$

z.B. $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$

Heisenberg'sche
Unschärfenrelation:

Ort und Impuls sind
nicht gleichzeitig scharf
messbar!

z.B.

Ortsdarstellung:

Teilchen beschrieben durch Wellenfunktion: $\psi(x)$

$$\hat{p} \psi(x) = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(x)$$