Poissonklammern

Zwei Observable $f(\{q_k\},\{p_k\},t)$ und $g(\{q_k\},\{p_k\},t)$

$$\{f,g\} := \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

Bemerkung:

Obige Definition ist konsistent mit den Büchern von Goldstein und Nolting, während bei Scheck ~~ist~~ die Reihenfolge vertauscht ist

Eigenschaften

i) Zeitentwicklung von g:

$$\boxed{\frac{dg}{dt} = \{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t}}$$

Falls also g nicht explizit zeitabhängig, d.h. $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dg}{dt} = \{g, H\}}$$

falls $\{g, H\} = 0 \Rightarrow \frac{dg}{dt} = 0$, d.h. g ist Erhaltungsgröße !

ii) <u>Spezialfälle für g</u>

- $g = q_k \underset{i)}{\Longrightarrow} \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k = \{q_k, H\}$

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}$$
$$= \sum_{m=1}^{f} \Big(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_m}}_{0} \frac{\partial H}{\partial q_m} \Big)$$

$= \frac{\partial H}{\partial p_k}$ entspricht der kanonischen BWGL für q_k !

analog:

- $g = p_k$

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\} = \dots = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

iii) <u>Fundamentale Poisson-Klammern</u>

$$\{q_k, q_l\} = 0$$

$$\{p_k, p_l\} = 0$$

$$\{q_k, p_l\} = \sum_{m=1}^{f} \Big(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_m}}_{\delta_{lm}} - \cancel{\frac{\partial q_k}{\partial p_m} \frac{\partial p_l}{\partial q_m}} \Big)$$

$$= \delta_{kl}$$

- Diese Relation tauchen genauso auch in der Quantenmechanik auf!

Wir werden später zeigen, daß die Poisson Klammer invariant ist gegenüber kanonische Transformation!

(v) Poissonklammern können als symplektisches (Skalar-)Produkt im Phasenraum aufgefaßt werden!

$$\{f, g\} = \sum_{m=1}^{f} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_m} \frac{\partial g}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial g}{\partial q_m} \Big)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_f} \right)} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right) \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}^{g_x}$$

$$(\underline{f}_x)^T \qquad \underline{\underline{J}} \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

$\underline{f}_x$, $\underline{g}_x$ sind Vektoren im 2f-dimensionalen Phasenraum

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \overbrace{}^{f\times f} & \overbrace{}^{f\times f} \\ \left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{array}\right) \end{array}}_{\underline{\underline{J}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_f} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix}}_{\underline{g}_x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung:

$$\{f,g\} = \underline{f}_x^T \, \underline{\underline{J}} \, \underline{g}_x = \overbrace{(\underline{f}_x, \underline{g}_x)}^{\text{symplektisches Skalarprodukt!}}$$

explizit:

$$\{f,g\} = \underline{f}_x^T \, \underline{\underline{J}} \, \underline{g}_x$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial x_\beta} \qquad (*)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

Konsequenz für BWGL

$$\dot{x}_\gamma \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus (i)}}}{=} \{x_\gamma, H\} \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha}}_{\delta_{\gamma\alpha}} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_\gamma = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{\gamma\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$$= \left(\underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x \right)_\gamma \qquad !$$

$$\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$$

entspricht unserem früheren Ergebnis!

2) Die Poissonklammer ist invariant unter einer kanonischen Transformation!

Kanon. Transformation

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

Wichtig in diesem Kontext:

$$\underline{\underline{M}} \text{ mit } M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1} \text{ mit } (\underline{\underline{M}}^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$$

es gilt: $\boxed{\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}}$ $\underline{\underline{J}}$ ist invariant

Zeige jetzt:

$$\{f, g\} = (\underline{f}_x, g_x)$$

$$= (\underline{f}_Y, \underline{g}_Y)$$

Benutze:

$$(\underline{f}_x)_\gamma = \frac{\partial f}{\partial x_\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \overbrace{\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma}}^{(\underline{\underline{M}}^{-1})_{\alpha\gamma}}$$

Kettenregel

$$= \sum_{\alpha=1}^{2f} \left((\underline{\underline{M}}^{-1})^T\right)_{\gamma\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{f}_x = (\underline{\underline{M}}^{-1})^T \underline{f}_Y \longrightarrow \underline{f}_x^T = \underline{f}_Y^T \underline{\underline{M}}^{-1}$$

$$\{f, g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x)$$

$$= \underline{f}_x^T \underline{\underline{J}} \, \underline{g}_x$$

$$= \underline{f}_Y^T \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^{-1})^T \underline{g}_Y$$

es gilt: $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^{-1})^T = \underline{\underline{J}}$ (nächster Zettel)

$$\Rightarrow \{f, g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x) = \underline{f}_Y^T \underline{\underline{J}} \, \underline{g}_Y = (\underline{f}_Y, \underline{g}_Y)$$

Wir zeigen schließlich:

Die Poissonklammern können als Kriterium für kanonische Transformationen verwendet werden!

genauer:

Die Transformation $(\{q_k\},\{p_k\}) \to (\{Q_k\},\{P_k\})$ ist dann kanonisch wenn (und nur wenn) die fundamentalen Poissonklammern gelten, d.h.

$$\{Q_k, P_\ell\} = \delta_{k\ell}$$

und $\{Q_k, Q_\ell\} = \{P_k, P_\ell\} = 0$

Betrachte dazu eine nicht explizit zeitabhängige $\underbrace{\text{Transformation}}_{\text{kanonisch}}$

$\Longleftrightarrow$ Die Erzeugende M ist nicht explizit zeitabhängig d.h. $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \bar{H} = H$

d.h. die Hamiltonfunktion sieht genauso aus wie vorher!

sei $y = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$

Invarianz unter Variablenwechsel

$$\dot{y}_\gamma = \{y_\gamma, \overline{H}\} = \{y_\gamma, H\} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

d.h. $$\dot{y}_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_\beta}$$

$$= \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_\beta}}_{\{y_\gamma, y_\delta\}}$$

!

also $$\dot{y}_\gamma = \sum_\delta \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \{y_\gamma, y_\delta\} \quad (*)$$

andererseits wissen wir:

$$\dot{y}_\gamma = \left(\underline{\underline{J}}\, \overline{H}_y\right)_\gamma = \sum_{\delta=1}^{2f} J_{\gamma\delta} \frac{\partial H}{\partial y_\delta} \quad (**)$$

kanonische BWGL

Vergleich von (*) und (**):

$\{y_\gamma, y_\delta\} \overset{!}{=} J_{\gamma\delta}$

damit die Gleichungen konsistent sind!

Erinnerung: $\underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$

$\{Q_k, Q_l\} = 0$

$\{P_k, P_l\} = 0$, aber $\{Q_k, P_l\} = \delta_{kl}$

Poissonklammern und Quantenmechanik (QM)

Übergang von der klassischen Mechanik zur QM erfolgt mit Hilfe des sogenannten Korrespondenzprinzips

$g(\{q_k\}, \{p_k\}, t) \longrightarrow$ quantenmechanische Operator $\hat{g}$ im Hilbertraum

mechanische Observable

speziell:

$$H(\{q_n\},\{p_n\},t) \longrightarrow \hat{H} \quad \text{Hamiltonoperator}$$

z.B. Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega x^2 \longrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega \hat{x}^2$$

Zeitentwicklung:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \longrightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \overbrace{[\hat{g}, \hat{H}]}^{\text{Kommutator}} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}$$

Klass. Mechanik

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

h Planck'sches Wirkungsquantum

Kommutator:

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$$

z.B. $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0 \longrightarrow$ Heisenberg'sche Unschärferelation: Ort und Impuls sind nicht gleichzeitig scharf meßbar!

z.B. Ortsdarstellung:

Teilchen beschrieben durch Wellenfunktion: $\psi(x)$

$$\hat{p}\,\psi(x) = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(x)$$