III. Mechanik des starren Körpers

Bisher: Systeme von Massenpunkten, die sich relativ zueinander bewegen konnten

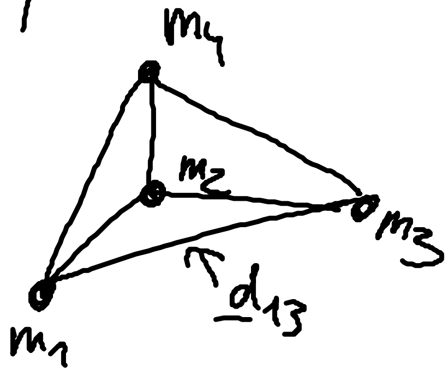
Jetzt: ausgedehnte starre Körper (Moleküle ohne Vibrations-Freiheitsgrade, Kreisel)

III.1. Definition des starren Körpers

betrachte 2 Typen A und B

A) System von N Massenpunkten mit starren Verbindungsvektoren $\underline{r}_i - \underline{r}_j = \underline{d}_{ij}$ ($\underline{d}_{ij} = \text{const}$)

z.B. $N=4$



„diskrete Massenverteilung"

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

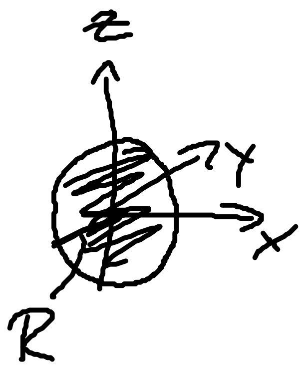
aus der Perspektive der Theoretischen Mechanik ist das ein System mit Zwangsbedingungen!

B) Körper mit einer fest vorgegebenen kontinuierlichen Massenverteilung $\rho(\underline{r})$

Gesamtmasse: $M = \int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r})$

z.B. kugelförmige Massenverteilung

(Ursprung des Koordinatensystems liegt im Zentrum der Kugel)



$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \rho, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Kugelradius

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Rightarrow \underbrace{M}_{\text{Gesamtmasse}} = \int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r}) = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \overbrace{\rho(r)}^{\rho}$$

$$= 4\pi\rho \int_0^R dr\, r^2 = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

Beachte :

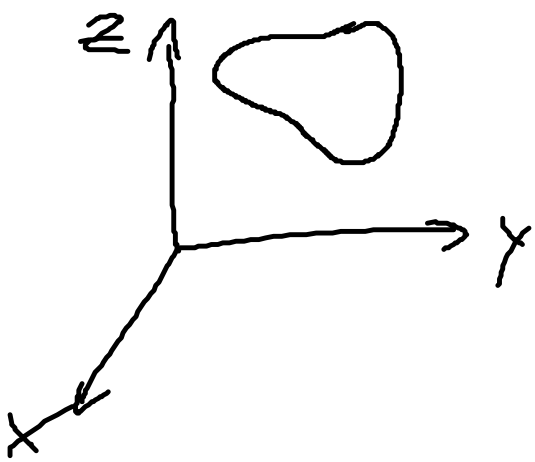
Beim starren Körper ist die (diskrete oder kontinuierliche) Massenverteilung zeitunabhängig!

(z.B. im kontinuierlichen Fall $\frac{d}{dt}\rho(\underline{r}) = 0$)

Beschreibung der Bewegung von starren Körpern

i) benutze Raumfestes Koordinatensystem K

K hat Achsen $\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{y}}, \hat{\underline{z}}$



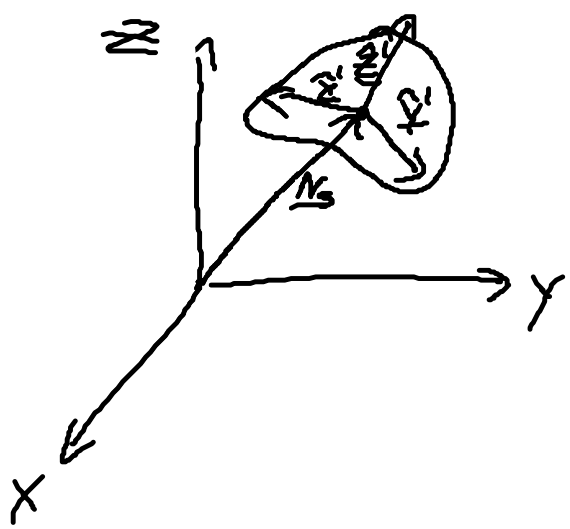
„raumfest" $\Longleftrightarrow$ K bewegt sich nicht bei Bewegung des starren Körpers!

wir nehmen ausserdem an:

K ist <u>Inertialsystem</u>: kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig (oder gar nicht)

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

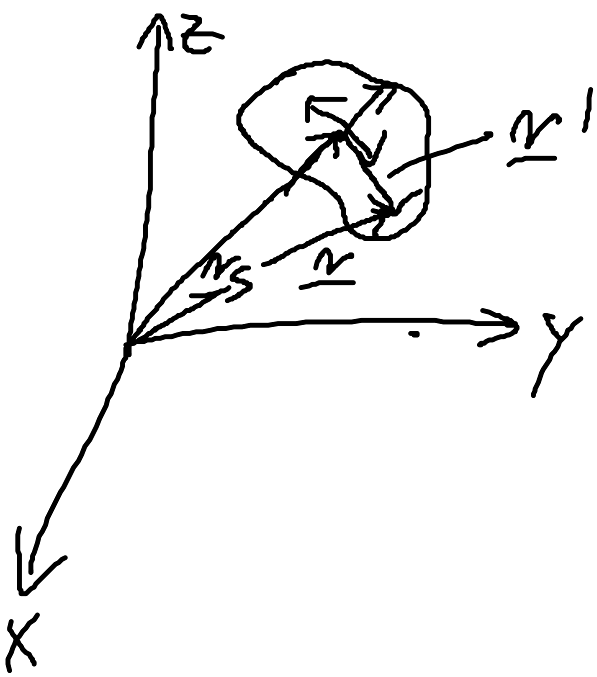
(ii) benutze <u>körperfestes Koordinatensystem</u> K' mit Achsen $\hat{\underline{x}}', \hat{\underline{y}}', \hat{\underline{z}}'$



Ursprung von K' wird meist in den Schwerpunkt S des Körpers gelegt
($\underline{r}_S$ sei der entsprechende Ortsvektor bzgl. K)

körperfestes System ist „verankert" mit dem starren Körper $\Rightarrow$ es bewegt sich mit!
($\Rightarrow K'$ ist im allgemeinen kein Inertialsystem!)

Beziehungen zw. Ortsvektoren in K und K'



$\underline{r}_S$: Ortsvektor von S bezgl. K

$\underline{r}$: Ortsvektor eines beliebigen Massenpunktes im Körper bezgl. K

$\underline{r}'$: Ortsvektor dieses Massenpunktes bezgl. K'

Es gilt also zu jeder Zeit t:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_S(t) + \underline{r}'(t)$$

Freiheitsgrade des starren Körpers

- 3 Komponenten von $\underline{r}_S$
- 3 Winkel bzw. Rotationsfreiheitsgrade

Drehungen von K' (bzw. $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$) bezgl. K (d.h. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)

$\Longrightarrow$ insgesamt $\underline{\underline{f = 6}}$!

(egal ob kontinuierliche oder diskrete Massenverteilung)

III.2. Geschwindigkeiten, Scheinkräfte

Ausgangspunkt:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_S(t) + \underline{r}'(t)$$

$$= \underline{r}_S(t) + \sum_{\alpha=1}^{3} x'_\alpha \, \hat{\underline{e}}'_\alpha$$

Komponenten bezgl. dieser Achsen

Achsen (Einheitsvektoren) in K'

$\hat{\underline{e}}'_1 \Leftrightarrow \hat{x}'$

$\hat{\underline{e}}'_2 \Leftrightarrow \hat{y}'$

$\hat{\underline{e}}'_3 \Leftrightarrow \hat{z}'$

betrachte nun allgemeine Zeitableitungen in den beiden System K und K'

("allgemein": Körper kann sich noch deformieren)

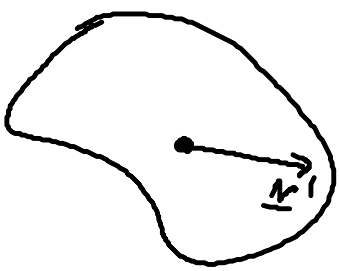
Erste Ableitung ($\to$ Geschwindigkeiten)

- in K' (mitbewegtes System):

Die Achsen $\underline{\hat{e}}'_\alpha$ sind zeitunabhängig!

$$\to \quad \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{x}'_\alpha(t)\,\underline{\hat{e}}'_\alpha$$

gilt auch für deformierbare Körper

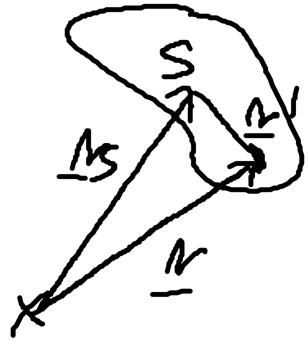


Ist der Körper wirklich ganz starr, dann ist $\dot{x}'_\alpha = 0$

$\dot{\underline{r}}'|_{K'} = 0$

• in K

(raumfestes System)



Erinnerung

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_S + \underline{r}'}$$

$$\boxed{\underline{r}' = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha' \underline{\hat{e}}_\alpha'}$$

$$\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K \quad \Big\} \text{ Schwerpunktsgeschwindigkeit}$$

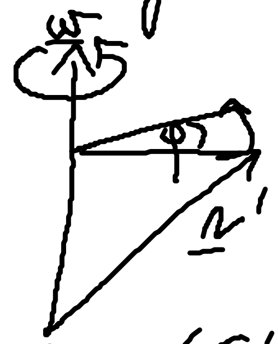
$$+ \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{x}_\alpha'(t) \underline{\hat{e}}_\alpha' \quad \Big\} \text{ Geschw. von } \underline{r}' \text{ bzgl. } K'$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha'(t) \dot{\underline{\hat{e}}}_\alpha' \quad \Big\} \text{ Geschwindigkeit eines } \underline{\text{starr}} \text{ mit } K' \text{ mitrotierenden Punktes!}$$

Umformung des letzten Terms

$$\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha' \dot{\underline{\hat{e}}}_\alpha' =: \frac{\delta \underline{r}'}{dt}$$

ausdrücken durch Winkelgeschwindigkeit



Kreuzprodukt

$$\frac{\delta \underline{r}'}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

S (Schwerpunkt des Körpers bzw. Ursprung des Koordinaten Systems K')

wobei

s. Kapitel I.1

$\hat{\underline{\omega}}$ Drehachse

$\omega = |\underline{\omega}| = \dot{\varphi}$ Winkelgeschwindigkeit

Zusammengefaßt.

~~Ablei~~ Geschwindigkeit in K:

$$\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K + \underline{r}'(t)\Big|_{K'} + \frac{\delta \underline{r}'}{dt} \qquad (*)$$

$$= \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K + \underline{r}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

benutze noch

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_S + \underline{r}'}$$

$$\underline{r}(t) - \underline{r}_S(t) = \underline{r}'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{r}}(t)\Big|_K - \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_K$$

Einsetzen in (*)

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

Allgemeine Umrechnungsvorschrift für die (ersten) zeitlichen Ableitungen in zwei Bezugssystemen.

$$\frac{d}{dt}\Big|_K \ldots = \frac{d}{dt}\Big|_{K'} \ldots + \underline{\omega} \times \ldots$$

Weitere Bemerkungen

- Zurück zur Gleichung

$$\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K + \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

Wenn der betrachtete Massenpunkt wirklich in K' ruht (d.h. wenn der Körper wirklich starr und nicht deformierbar ist

$$\Rightarrow \underline{\dot{r}}'(t)\big|_{K'} = \sum_{\alpha=1}^{3} \underbrace{\dot{x}'_\alpha(t)}_{0} \underline{\hat{e}}'_\alpha = 0$$

$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_S$

Es folgt:

$$\underline{\dot{r}}(t)\big|_K = \underline{\dot{r}}_S(t)\big|_K + \underline{\omega} \times \underline{r}' \quad \left(\Leftrightarrow \underline{\dot{r}}'(t)\big|_K = \underline{\omega} \times \underline{r}'\right)$$

$$\Rightarrow \underline{v}\big|_K = \underline{v}_S\big|_K + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

Falls man speziell den Schwerpunkt betrachtet d.h. $\underline{r}' = 0$

$$\Rightarrow \underline{v}\big|_K = \underline{v}_S\big|_K \quad \text{wie zu erwarten war!}$$

Betrachte nun die zweiten

Zeitlichen Ableitungen

(→ Beschleunigungen)

Startpunkt:

$$\underbrace{\dot{\underline{r}}'(t)\big|_K}_{\dot{\underline{r}}(t)|_K - \dot{\underline{r}}_S(t)|_K} = \dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}' \qquad \circledast$$

$$\frac{d}{dt}\,\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_K = \ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_K \overset{\circledast}{=} \frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'}\right)\Big|_K + \frac{d}{dt}\left(\underline{\omega} \times \underline{r}'\right)\Big|_K$$

Wende auf jeden Term auf der rechten Seite die Umrechnungsvorschrift für erste zeitliche Ableitungen an!

$$\ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_K = \ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} \Bigg\} \text{Beitrag aus dem ersten Term}$$

$$+ \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\underline{\omega} \times \underline{r}'\right)\Big|_{K'}}_{\dot{\underline{\omega}}|_{K'} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'|_{K'}} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}'\right) \Bigg\} \text{aus zweiten Term}$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{r}}'(t)\big|_K$$

$$= \underline{\ddot{r}}'(t)\big|_{K'} + 2\,(\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}'|_{K'})$$

$$+ \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

Umstellen:

$$m\,\underline{\ddot{r}}'(t)\big|_{K'} = m\,\underline{\ddot{r}}'(t)\big|_K - 2\,(\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}'|_{K'})\cdot m$$

$$- m\,\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}'|_{K'} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')\,m$$

benutze $m\,\underline{\ddot{r}}'(t)\big|_K = m(\underline{\ddot{r}}(t)|_K - \underline{\ddot{r}}_S(t)|_K)$

und $m\,\underline{\ddot{r}}(t)\big|_K = \underline{F}$

Kraft, die in K wirkt!

$$\Rightarrow \boxed{m\,\underline{\ddot{r}}(t)\big|_{K'} = \underline{F} - m\,\underline{\ddot{r}}_S + \underline{F}_C + \underline{F}_Z - m(\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}')}$$

mit

$$\underline{F}_C = -2m(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}') \quad \text{Corioliskraft}$$

$$\underline{F}_Z = -m(\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')) \quad \text{Zentrifugalkraft}$$

Die Gleichung $\boxed{\;\cdots\;}$

stellt die BWGL im

körperfesten (mitbewegten) Bezugssystem dar!

man sieht:

Neben $\underline{F}$ tauchen weitere Kraft-Beiträge in der BWGL auf

$\longrightarrow$ „Scheinkräfte"