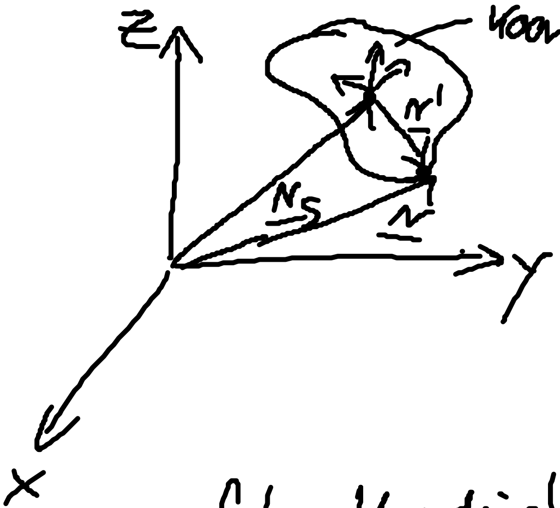


$\underline{r}_S$: Schwerpunktsvektor bezgl. K

raumfestes Koordinatensystem K

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_S(t) + \underline{r}'(t)$$

$$\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K + \underbrace{\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'}}_{\text{verschwindet, falls Körper wirklich ganz starr!}} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

$$\underline{v}\Big|_K = \underline{v}_S\Big|_K + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

Beschleunigung

$$\ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_K = \ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + 2\,(\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}')\Big|_{K'} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'$$

multipliziere mit ~~m~~ Masse und benutze: $\boxed{\underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_S}$

$$\ddot{\underline{r}}'(t)\big|_K = \ddot{\underline{r}}(t)\big|_K - \ddot{\underline{r}}_S(t)\big|_K$$
$$= m^{-1}\underline{F} - \ddot{\underline{r}}_S(t)\big|_K$$

$$\Rightarrow m\ddot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'} = \underline{F} - m\ddot{\underline{r}}_S\big|_K + \underline{F}_C + \underline{F}_Z - m(\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}')$$

mit

$$\underline{F}_C = -2m(\underline{\omega} \times \underline{v}')$$

$$\underline{F}_Z = -m(\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'))$$

Die Bewegungsgleichung im körperfesten System enthält neben $\underline{F}$ (die auch in der BWGL bezgl. des raumfesten Systems auftritt)

weitere, sogenannte „Scheinkräfte“:

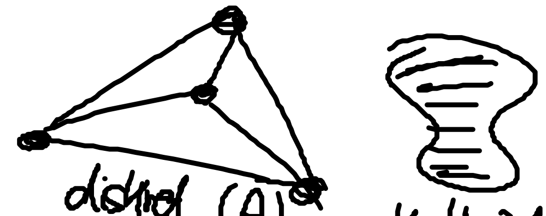
Grund für das Auftreten dieser Scheinkräfte:

- Beschleunigung von K' relativ zu K ($\ddot{\underline{r}}_S$)
- Rotation „ „ „ „ „ ($\underline{\omega}$)

$\Rightarrow$ K' ist kein Inertialsystem

III.3. Kinetische Energie und Trägheitstensor

Setze Ursprung vom körperfesten System K' in den Schwerpunkt des Körpers



Dann folgt

A)
$$\underline{r}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \quad \text{mit} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

„Mittelung über alle $\underline{r}_i$ gewichtet mit den Einzelmassen m_i"

Schwerpunktsvektor bzgl. des raumfesten Systems K !

Schwerpunktsvektor bzgl. K'

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' \qquad \text{mit} \quad \underline{r}_i' = \underline{r}_i - \underline{r}_S$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_S) = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i - \underline{r}_S \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$= M \cdot \underline{r}_S - \underline{r}_S \cdot M = 0$$

plausibel, da wir den Schwerpunkt in den Ursprung des Systems K' gelegt haben

B) System mit kontinuierlichen Massenverteilung

Schwerpunkt bzgl. K : $\underline{r}_S = \frac{1}{M}\int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})\, \underline{r}$

(Bemerkung: man kommt zurück zum diskreten Fall, indem man setzt: $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)\, m_i$
Deltafunktionen

$$\Rightarrow \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})\, \underline{r} = \sum_{i=1}^{N} \int d\underline{r}\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)\, \underline{r}\, m_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i m_i = \underline{R}_S$$
)

Schwerpunkt bzgl. K':

$$\int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, \underline{r}' = 0 \quad !$$

gilt dann, wenn der Schwerpunkt in den Ursprung von K' gesetzt wurde!

Betrachte nun die kinetische Energie

A) Diskret

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 \qquad v_i = \dot{\underline{r}}_i$$

benutze: $\underline{v}_i = \underline{V}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'$ Relation für die Geschwindigkeiten

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{v}_s + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_s \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \cdot 2$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega} \times \underline{r}_i'\right)^2$$

betrachte 2. Term auf der rechten Seite.

$$\frac{1}{2}\sum_{i} m_i \underline{v}_s \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i') \cdot 2$$

$$= \underline{v}_s \cdot \sum_{i} m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

benutze: $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$

$$= (\underline{v}_s \times \underline{\omega}) \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i'}_{\text{Schwerpunktvektor bzgl. } u' \text{ Null!}}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

$$= \frac{M}{2}\underline{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

betrachte 2. Term auf der rechten Seite.

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}||\sin\alpha|$$

$$(\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

$$= |\underline{\omega}|^2 |\underline{r}_i'|^2 \sin^2\alpha_i$$ mit α_i Winkel zwischen $\underline{r}_i'$ und $\underline{\omega}$

$$= \omega^2 |\underline{r}_i'|^2 (1 - \cos^2\alpha_i)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cdot \cos\alpha$$

$$= \omega^2 |\underline{r}_i'|^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_i')^2$$

benutze:

$$\omega^2 = |\underline{\omega}|^2 = \sum_{\mu=1}^{3} \omega_\mu^2 \qquad (\mu = x, y, z)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{\mu=1}^{3} a_\mu b_\mu$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} a_\mu b_\mu a_\nu b_\nu$$

$$\Rightarrow (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2 = \sum_{\mu=1}^{3} \omega_\mu^2 |\underline{r}_i'|^2 - \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu \omega_\nu (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu$$

$$(\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2 = \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu \left[\delta_{\mu\nu} |\underline{r}_i'|^2 - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right] \omega_\nu$$

Kronecker delta

Einsetzen in den Ausdruck für die kinetische Energie.

$$T = \frac{M}{2} \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2$$

$$= \frac{M}{2} \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu} \omega_\nu$$

mit dem <u>Trägheitstensor</u> $J_{\mu\nu}$

Definition:

$$J_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left((\underline{r}_i')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right)$$

Umschreiben von T in eine noch kompaktere Form.

$$T = \frac{M}{2}\underline{V}_S^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$$

~~..~~ wobei $\underline{\underline{J}}$ eine 3×3 Matrix mit Kompaneten $J_{\mu\nu}$ ist!

B) Kinetische Energie im kontinuierlichen Fall

$$T = \frac{1}{2}\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,\underline{v}^2$$

$$= \ldots\ldots = \frac{M}{2}\underline{V}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\omega_\mu J_{\mu\nu}\omega_\nu$$

Übungzettel! genau wie im diskreten Fall!

mit $J_{\mu\nu} = \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\left[(\underline{r}')^2\delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu(\underline{r}')_\nu\right]$

In beiden Fällen (diskret und kontinuierlich) kann die kinetische Energie in 2 Anteile zerlegt werden

$$T = T_{trans} + T_{rot}$$

mit $T_{trans} = \frac{M}{2} \underline{v_s}^2$

translatorischer Anteil

$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \, \underline{\underline{J}} \, \underline{\omega}$ rotatorischer Anteil

Trägheitstensor spielt in T_{rot} eine ähnliche Rolle wie die Masse M für die translatorische Bewegung

analog $\underline{\omega} \Leftrightarrow \underline{v_s}$

III.4. Eigenschaften des Trägheitstensors

i) $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe

(da die Elemente von J durch 2 Indizes charakterisiert werden)

(Vektoren: Tensor 1. Stufe
Skalare: Tensor 0. Stufe)

Transformationsverhalten unter Drehung:

betrachte ~~Komponente~~ Komponente eines Tensors 1. Stufe

$$(\underline{v}')_\mu \xrightarrow[\text{Drehung}]{} (\underline{v}'')_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} R_{\mu\nu} (\underline{v}')_\nu$$

wobei

$R_{\mu\nu}$: Elemente einer Drehmatrix

$\underline{\underline{R}}$ ist eine 3×3 Matrix

und es gilt: $\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$, $\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$

$\det \underline{\underline{R}} = 1$

($\underline{\underline{R}} \in SO(3)$ „spezielle orthogonale Gruppe in drei reellen Dimensionen")

Wie transformiert ein Tensor n-ter Stufe mit $n > 1$?

man fordert:

Tensor n-ter Stufe transformiert sich bzgl. jedes Index wie ein Tensor 1. Stufe (Vektor)!

$$J_{\mu\nu} \xrightarrow[\text{Drehung}]{} J'_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} J_{\gamma\delta}$$

vergleich mit vorher
$$(\underline{r}'')_\mu = \sum_\nu R_{\mu\nu} (\underline{r}')_\nu$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} R_{\mu\gamma} J_{\gamma\delta} \underbrace{R_{\nu\delta}}_{(\underline{\underline{R}}^T)_{\delta\nu}}$$

Kompakt:

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\ \underline{\underline{J}}\ \underline{\underline{R}}^T$$

Trägheitstensor nach Drehung

Trägheitstensor ~~für~~ vor der Drehung!

analog für Tensor 1. Stufe:

$$\underline{r}'' = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{r}'$$

Vektor nach Drehung

Vektor vor der Drehung

allgemein ~~analog~~: Drehungen von Tensoren n-der Stufe tauchen n Drehmatrizen auf!