Wh: Eigenschaften von $\underline{\underline{J}}$

i) $\underline{\underline{J}}$ ist Tensor 2. Stufe

$\geq$ Komponenten $(\underline{\underline{J}})_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}$

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\ \underline{\underline{J}}\ \underline{\underline{R}}^T$$

$\uparrow$ Drehmatrix

$(\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$

$\det \underline{\underline{R}} = +1)$

für Tensor 1. Stufe:

$$\underline{r}'' = \underline{\underline{R}}\, \underline{r}'$$

in Komponentenschreibweise:

$$(\underline{r}'')_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} R_{\mu\nu} (\underline{r}')_\nu$$

$$J'_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} J_{\gamma\delta}$$

Beweis des Transformationsverhaltens $(\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\ \underline{\underline{J}}\ \underline{\underline{R}}^T)$ für die explizite Form des Trägheitstensor

Beispiel diskrete Massenverteilung

$$J_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\underline{r}_i')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right]$$

betrachte zunächst Auswirkung der Drehung auf die Größe $(\underline{r}_i')^2 = \sum_{\tau=1}^{3} (\underline{r}_i')_\tau^2$

benutze $(\underline{r}_i'')_\tau = \sum_{\delta=1}^{3} R_{\tau\delta} (\underline{r}_i')_\delta$

$$\underbrace{\sum_{\tau=1}^{3} (\underline{r}_i'')_\tau^2}_{(\underline{r}_i'')^2} = \sum_{\tau=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} \sum_{\gamma=1}^{3} R_{\tau\delta} R_{\tau\gamma} (\underline{r}_i')_\delta (\underline{r}_i')_\gamma$$

$$= \sum_\delta \sum_\gamma (\underline{r}_i')_\delta \underbrace{\sum_\tau R_{\tau\delta} R_{\tau\gamma}}_{\underbrace{\sum_\tau (\underline{\underline{R}}^T)_{\delta\tau} R_{\tau\delta}}_{(\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}})_{\gamma\delta} = \delta_{\gamma\delta}}} (\underline{r}_i')_\gamma$$

$$\boxed{\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}}$$

$$= \sum_\gamma (\underline{r}_i')_\gamma (\underline{r}_i')_\gamma = (\underline{r}_i')^2$$

$\Rightarrow$ ~~...~~ Diese Größe ist invariant unter Drehungen!

Betrachte jetzt den Einfluss der Drehung auf $\delta_{\mu\nu}$ in $J_{\mu\nu}$

$$\delta'_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta}\, \delta_{\gamma\delta}$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{3} R_{\mu\gamma} \underbrace{R_{\nu\gamma}}_{(\underline{R}^T)_{\gamma\nu}} = \sum_{\gamma} R_{\mu\gamma} (\underline{R}^T)_{\gamma\nu}$$

$$= (\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T}_{\underline{1}})_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

invariant!

betrachte jetzt den ganzen Trägheitstensor

$$J'_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta}\, J_{\gamma\delta}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{\gamma} \sum_{\delta} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} \left((\underline{r}_i')^2 \delta_{\gamma\delta} - (\underline{r}_i')_\gamma (\underline{r}_i')_\delta \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\underline{r}_i')^2 \delta_{\mu\nu} - \sum_{\gamma} R_{\mu\gamma} (\underline{r}_i')_\gamma \sum_{\delta} R_{\nu\delta} (\underline{r}_i')_\delta \right]$$

$\left(\text{mit } (\underline{r}_i'')^2 = (\underline{r}_i')^2\right)$

benutze: z.B. $\sum_\gamma R_{\mu\gamma} (\underline{r}_i')_\gamma = (\underline{r}_i'')_\mu$

$$\Rightarrow J'_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\underline{r}_i'')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i'')_\mu (\underline{r}_i'')_\nu \right]$$

Weitere Eigenschaften des Trägheitstensors:

(i) $\underline{\underline{J}}$ hat 2 Anteile:

$$J_{\mu\nu} = \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') \left[(\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right]$$

$$= \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') (\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu}$$

rotationsinvariante Anteil!

$$- \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu$$

hängt ab von der Wahl der Achsen!

(ii) $\underline{\underline{J}}$ ist <u>linear</u> in $\rho(\underline{r}')$ bzw. den m_i

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ ist additiv beim Vergrößern eines Körpers bzw. dem Zusammenfügen zweier Körper!

($\underline{\underline{J}}$ ist eine „extensive" Größe)

wächst mit der Systemgröße

iv) $\underline{\underline{J}}$ wird dargestellt durch eine reelle, symmetrische 3×3 Matrix.

Explizit (kontinuierlich):

$$\underline{\underline{J}} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \begin{pmatrix} y'^2+z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & x'^2+z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & x'^2+y'^2 \end{pmatrix}$$

v) Folgerung aus iv)

$\underline{\underline{J}}$ ist diagonalisierbar!

durch Anwendung einer orthogonalen Transformation mit der Matrix $\underline{\underline{R}}$

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}!$$

mit J_1, J_2, J_3: Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$

Spalten von $\underline{\underline{R}}$: Eigenvektoren

„Anschauliche Deutung":

Achsen des körperfesten Systems (K') können immer so gedreht werden, daß $\underline{J}$ diagonal wird!

Eigenwerte: J_1, J_2, J_3: „Hauptträgheitsmomente"

Eigenvektoren: „Haupt-Trägheitsachsen"

Im Hauptachsensystem hat $\underline{\underline{J}}$ dann folgende explizite Form:

$$\underline{\underline{J}}' = \int dR\, \rho(\underline{R}) \begin{pmatrix} R_y^2+R_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_x^2+R_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & R_x^2+R_y^2 \end{pmatrix}$$

$\underline{R}$: Vektoren im gedrehten System

Praktische Durchführung der Diagonalisierung:

gg.: $\underline{\underline{J}}$

Eigenwerte aus dem charakteristischen Polynom.

$$\det(\underline{\underline{J}} - J_i \underline{\underline{1}}) = 0 \Rightarrow \underbrace{J_1, J_2, J_3}_{\text{Eigenwert}}$$

Eigenvektoren (Hauptträgheitsachsen) erhält man durch Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{\underline{J}}\, \underline{j}_i = J_i\, \underline{j}_i \qquad i = 1,2,3$$

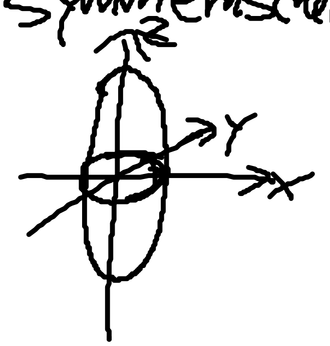
$\underline{j}_i$

man nennt starre Körper mit

- $J_1 \neq J_2$, $J_1 \neq J_3$, $J_2 \neq J_3$

  „unsymmetrischer Kreisel"

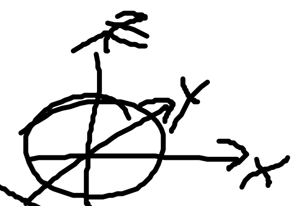
- $J_1 = J_2 \neq J_3$ „symmetrischer Kreisel"



$J_x = J_y = J_\perp$

$J_z \neq J_\parallel$

- $J_1 = J_2 = J_3 = J$ „Kugelkreisel"



Trägheitsmoment bzgl. einer beliebigen Achse $\underline{n}$:

$$J_n = \underline{n}\, \underline{\underline{J}}\, \underline{n}$$

falls speziell $\underline{n} = \underline{j}_i$ ← Hauptträgheitsachse

$$J_n = \underline{j}_i \underline{\underline{J}}\, \underline{j}_i$$
$$= \underline{j}_i (J_i \underline{j}_i) = J_i (\underline{j}_i)^2$$

↑ Hauptträgheitsmoment

Folgerungen für die kinetische Energie, speziell den Rotationsanteil:

$$T = T_{trans} + T_{rot} \qquad \left(T_{trans} = \frac{M}{2} \underline{v}_S^2 \right)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega}\, \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega} \qquad (\underline{\omega} \text{ Drehachse})$$

Falls speziell $\underline{\omega}$ parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen ist.

$$\underline{\omega} \parallel \underline{j}_i \qquad \left(\underline{\underline{J}}\, \underline{j}_i = J_i \underline{j}_i \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega} = J_i\, \omega\, \underline{j}_i$$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\underline{j}_i\,\underline{\underline{J}}\,\underline{j}_i\,\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega^2\,J_i\,\underbrace{(\underline{j}_i)^2}$$

wird typischerweise gleich 1 gesetzt (Hauptträgheitsachsen werden normiert!)

Zum Vergleich: Translat.-Bewegung eines Teilchens

$$T_{trans} = \frac{m}{2}\,\underline{v}^2$$

etwas allgemeiner

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\omega}$$

$$\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T$$

$$= \frac{1}{2}\,\underbrace{\underline{\omega}\,\underline{\underline{R}}^T}_{(\underline{\omega}')^T}\,\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{R}}^T}_{\underline{\underline{J}}'}\,\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{\omega}}_{\underline{\omega}'}$$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{\omega}'^T\,\underline{\underline{J}}'\,\underline{\omega}' = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\omega'_\mu\,J'_{\mu\nu}\,\omega'_\nu$$

wähle $\underline{\underline{R}}$ so, daß $\underline{\underline{J}}'$ diagonal! $\quad J'_{\mu\nu} = J_\mu\,\delta_{\mu\nu}$

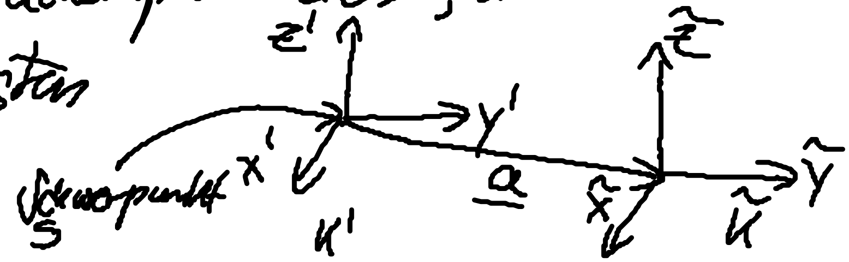
$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} (\omega'_\mu)^2 J_\mu$$

Hauptträgheitsmoment

III.5. Der Satz von Steiner

Sei $\underline{\underline{J}}$ der Trägheitstensor in einem im Schwerpunkt S zentrierten körperfesten System K'.

Sei $\tilde{K}$ ein zu K' achsenparalleles, um einen Vektor $\underline{a}$ verschobenes System



Dann ist $\underline{\underline{\tilde{J}}}$ gegeben durch:

d.h. Trägheitstensor in $\tilde{K}$

$$\boxed{\tilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M\left(\underline{a}^2\delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu(\underline{a})_\nu\right)} \quad (*)$$

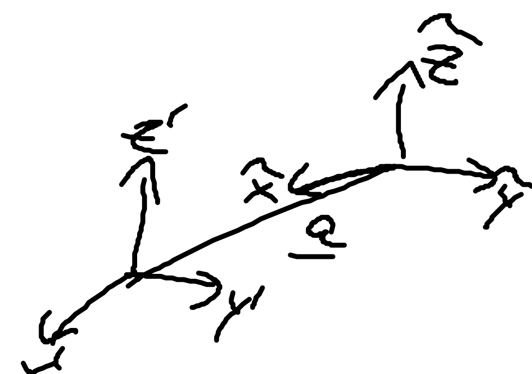
Folgerung: Man braucht (bei gegebenem $\underline{a}$) den Trägheitstensor nur einmal ausrechnen!

Zeige das am Beispiel einer kontinuierlichen Massenverteilung

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \int d\underline{\tilde{r}}\ \tilde{\rho}(\underline{\tilde{r}})\left(\underline{\tilde{r}}^2\delta_{\mu\nu} - (\underline{\tilde{r}})_\mu(\underline{\tilde{r}})_\nu\right)$$

$\uparrow$ Massenverteilung bzgl. $\tilde{r}$

benutze $\underline{\tilde{r}} = \underline{r}' + \underline{a}$



$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \int d\underline{r}'\rho(\underline{r}')\left[(\underline{r}')^2\delta_{\mu\nu} + 2\underline{a}\cdot\underline{r}'\delta_{\mu\nu} + \underline{a}^2\delta_{\mu\nu}\right]$$

$$-\int d\underline{r}'\rho(\underline{r}')\left[(\underline{r}')_\mu(\underline{r}')_\nu + (\underline{r}')_\mu(\underline{a})_\nu + (\underline{r}')_\nu(\underline{a})_\mu + (\underline{a})_\nu(\underline{a})_\mu\right]$$

Erinnerung:
Der Schwerpunkt des starren Körpers liegt im <u>Ursprung</u> des System K'

$$\underline{r}_S' = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underline{r}' = 0 \quad !$$

(s. Beginn des Kapitels III.3)

analog: $\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')(\underline{r}')_\mu = 0$

in dem (letzten) Ausdruck für $\tilde{J}_{\mu\nu}$ <u>verschwinden</u> alle Terme, die linear in $\underline{r}'$ sind!

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left[(\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right]$$

$$+ \underbrace{\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')}_{M} \underbrace{\left[\underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu (\underline{a})_\nu \right]}_{\text{unabhängig von } \underline{r}'} \quad !$$

$$= \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left[(\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right]$$

$$+ M \left[a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu \right]$$

$$= J_{\mu\nu} + M\,[a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu]$$

entspricht $\circledast$

q.e.d. !