

Wh: Drehimpuls des starren Körpers

$$\underline{L} = \underline{L}_S + \underline{L}_{rel}$$

↑
Schwerpunkts-
anteil

„Relativ-Anteil“:
unabhängig von der Wahl
des Ursprungs von H !

Es gilt: $\underline{L}_{rel} = \underline{J} \underline{\omega}$

im Allgemeinen hat \underline{L}_{rel} nicht dieselbe
Richtung wie $\underline{\omega}$

Ausnahme: $\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i$
↑
Hauptträgheitsachse

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = \underline{J}_i \underline{\omega}$$

Kinet. Energie: $T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{J} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{L}_{rel}$

Zeitentwicklung:

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext}$$

Zeitentwicklung des
Gesamt Drehimpuls
im raumfesten System

äußeres
Drehmoment

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L}^{rel}(t) = \underline{N}_{rel}^{ext} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext}$$

Zeitableitung im raumfesten System

allgemeine Transformationsregel für Vektoren:

$$\frac{d \underline{a}}{dt} \Big|_K = \frac{d \underline{a}}{dt} \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{a}$$

K : raumfestes System

K' : Körperfestes Syst.

jetzt: $\underline{a} = \underline{L}_{rel}$

$$\begin{aligned} \frac{d \underline{L}_{rel}}{dt} \Big|_K &= \frac{d \underline{L}_{rel}}{dt} \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{L}_{rel} \\ &= \underline{N}_{rel}^{ext} \end{aligned}$$

benutze noch: $\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}} \underline{\omega}$

$$\frac{d \underline{L}_{rel}}{dt} \Big|_{K'} = \underline{\underline{J}} \underline{\dot{\omega}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{J}} \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} \underline{\omega} = \underline{N}_{rel}^{ext}} \quad (*)$$

Euler'sche Gleichungen

da $\frac{d \underline{\underline{J}}}{dt} \Big|_{K'} = 0$
(Massenverteilung ist in K' zeitunabhängig!)

$$\underline{\dot{\omega}} = \frac{d \underline{\omega}}{dt} \Big|_{K'}$$

Um Formulierung von $\textcircled{4}$ in einem Satz
skalaren Gleichungen:

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \underline{j}_i$$

$$\Rightarrow \underline{J} \underline{\omega} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \underline{j}_i \quad ; \quad \underline{N}_{\text{rel}} = \sum_{i=1}^3 N_i \underline{j}_i$$

$$\Rightarrow J_i \dot{\omega}_i + \sum_k \sum_l \omega_k \omega_l J_l (\underline{j}_k \times \underline{j}_l)_i = N_i$$

$i=1, 2, 3$

explizit:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = N_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) = N_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) = N_3 \end{cases}$$

Euler'sche
Gleichungen im
Hauptachsensystem

Nehme im Folgenden an, dass die
äußeren Kräfte verschwinden

$$\Rightarrow N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) = 0$$

Allgemeine Folgerungen aus ①-③ im verkürzten Fall

1) Bilde ① · ω_1 + ② · ω_2 + ③ · ω_3

$$\Rightarrow J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \underbrace{[(J_2 - J_3) + (J_3 - J_1) + (J_1 - J_2)]}_0 = 0$$

$$\Rightarrow J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \right) = 0 \quad !$$

(denn z.B. $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 \right) = J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1$)

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2 \right) = \frac{d}{dt} (T_{\text{rot}}) = 0$$

\Rightarrow Die kinetische Energie der Rotationsbewegung bleibt also im verkürzten System erhalten!

Dieses Ergebnis ($T_{\text{rot}} = \text{const}$)

würde man auch folgern können aus der folgenden Tatsache:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} (T^{\text{trans}}) + \frac{d}{dt} (T^{\text{rot}}) = 0$$

da kreisförmiges System!

$$\text{und } \frac{d}{dt} (T^{\text{trans}}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (T^{\text{rot}}) = 0$$

2) Bilde nun ① $J_1 \omega_1$ + ② $J_2 \omega_2$ + ③ $J_3 \omega_3$

$$\Rightarrow J_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \underbrace{\dots}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 J_i^2 \dot{\omega}_i \omega_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i^2 \omega_i^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left. \frac{1}{2} |\underline{L}_{\text{rel}}|^2 \right|_{K'} = 0$$

deun $\underline{L}_{\text{rel}} = \underline{J} \underline{\omega} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \underline{j}_i$

$$\Rightarrow \underline{L}_{\text{rel}}^2 = \sum_{i,k} J_i \omega_i J_k \omega_k \underbrace{\underline{j}_i \cdot \underline{j}_k}_{\delta_{ki}}$$

$$\stackrel{\text{Vektors}}{=} \sum_i J_i^2 \omega_i^2$$

Hauptträgheitsachsen
↙
(orthogonal!)

Betrag des $\underline{L}_{\text{rel}}$ ist also offensichtlich konstant im raumfesten System!

Beachte: Für das raumfeste System
wissen wir natürlich, daß

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{\text{rel}} \Big|_K = N_{\text{rel}}^{\text{extern}} = 0$$

→ Richtung und Betrag von $\underline{L}_{\text{rel}}$
bleiben im raumfesten System also
erhalten!

Frage: Ist auch die Richtung von $\underline{L}_{\text{rel}}$ im körperfesten
System konstant?

$$\underline{L}_{\text{rel}} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \mathbf{f}_i \Rightarrow \text{Richtung ist nur dann konstant, wenn } J_i \omega_i = 0 \text{ } \forall i=1,2,3!$$

benutze Euler'sche Gleichungen ①-③

$$J_1 \omega_1 = 0 \iff \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = 0$$

$$\omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) = 0$$

$$\omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) = 0$$

Für einen Kreis mit $J_1 \neq J_2$, $J_1 \neq J_3$, $J_2 \neq J_3$
müssen also zwei Komponenten von $\underline{\omega}$ verschwinden,!

$\Rightarrow \underline{\omega}$ muß parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen sein!

Konsequenz:

Die Richtung von $\underline{L}_{\text{rel}}$ in K' ist nur dann konstant, falls $\underline{\omega} \parallel \underline{j}_i$ ($i=1,2,3$)

Super-symmetrischer Spezialfall

$$\text{Kugelmoment: } J_1 = J_2 = J_3 = J$$

$$\underline{L}_{\text{rel}} = J \underline{\omega}$$

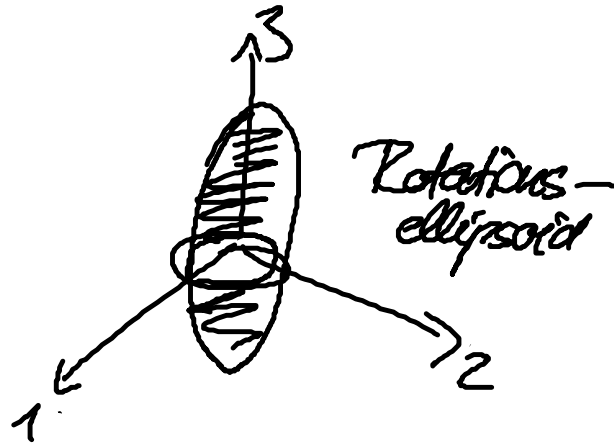
$$\text{Euler'sche Gleichung: } J \dot{\omega}_i = 0$$

\Rightarrow Der Drehimpuls und damit auch die Drehachse sind im Körperfesten System (wie auch im raumfesten System) konstant!

III.8 Der kräftefreie symmetrische Kreis

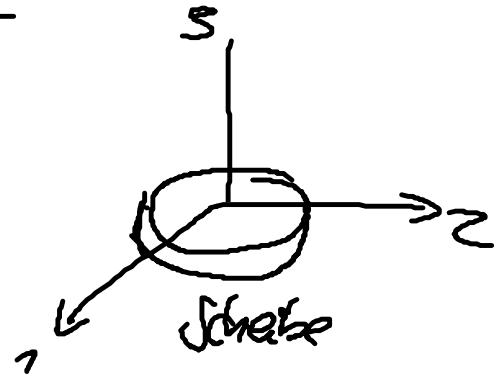
$$J_1 = J_2 = J$$

$$J_3 \neq J$$



Kraftfreier Fall:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0$$



läßt sich dadurch realisieren, daß man den Kreisel im Schwerpunkt aufhängt!

denn dann gilt:

$$N_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i' \times (-m_i g \hat{e}_z)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i' \right) \times (-g \hat{e}_z)$$

benutze: $\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i' = 0$

(Schwerpunkt im Körperfesten System)!

$$\Rightarrow \underline{N_{\text{rel}}} = 0$$

Euler'sche Gleichungen:

$$J \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J - J_3) = 0 \quad (1)$$

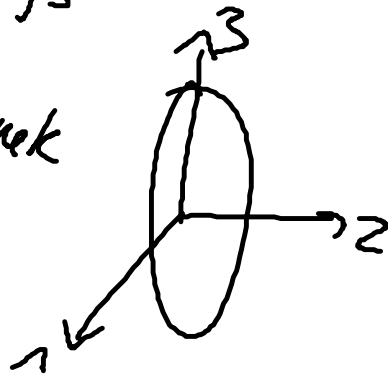
$$J \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J) = 0 \quad (2)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (3)$$

aus (3) folgt sofort: $\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3$ ist zeitlich konstant!

d.h. die Projektion von $\underline{\omega}$ auf die sogenannte "Figuraachse" J_3 ist konstant!

ausgezeichnete Achse



betrachte nun (1) und (2)

$$\text{aus (1): } J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \omega_3 \omega_2$$

$$\Leftrightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{J - J_3}{J} \omega_3 \omega_2$$

analog:
aus (2)

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J}{J} \omega_3 \omega_1$$

definiere

$$\omega_0 = \frac{J - J_3}{J} \omega_3$$

$$\Rightarrow \dot{w}_1 = w_0 w_2 \quad \textcircled{a}$$

$$\dot{w}_2 = -w_0 w_1 \quad \textcircled{b}$$

betrachte 2. Ableitungen nach der Zeit.

$$\ddot{w}_1 = \dot{w}_0 w_2 + w_0 \dot{w}_2$$

$$\dot{w}_0 = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{J - J_3}{J}}_{\text{Konstant in } t'} w_3 \right) = 0$$

da $\dot{w}_3 = 0$
(Gl. ⑤)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{w}_1 = w_0 \dot{w}_2 = -w_0^2 w_1 \quad \textcircled{b} \\ \text{analog:} \\ \ddot{w}_2 = -w_0 \dot{w}_1 = -w_0^2 w_2 \quad \textcircled{a} \end{array} \right.$$

Schwingungsgleichungen

Lösungen:

$$w_1(t) = \underline{w_1} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$w_2(t) = \underline{w_1} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

mit $\underline{w_1}$ und φ als Integrationskonstante

und

$$w_3(t) = \text{const}$$

Folgerungen:

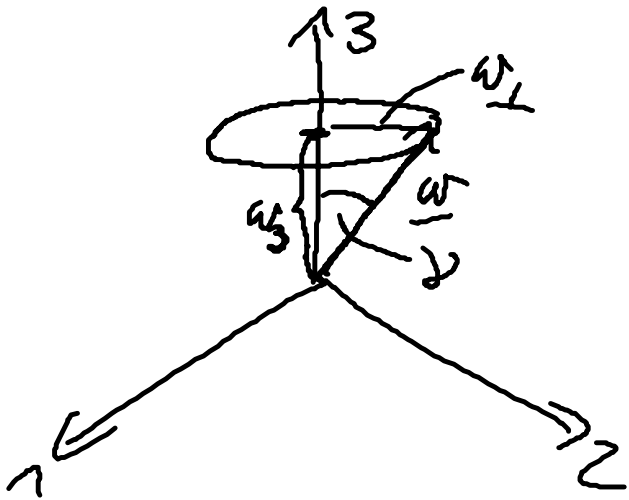
$$\bullet \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{\perp}^2 \left(\underbrace{\sin^2(\dots) + \cos^2(\dots)}_1 \right) = \omega_{\perp}^2 = \text{const!}$$

Damit folgt: $\underline{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \text{const}$

Die Drehachse $\underline{\omega}$ hat also

konstante Länge — aber nicht
eine konstante Richtung!

$\underline{\omega}$ rotiert gleichförmig mit Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die Fixachse ω_3 $\left(\omega_0 = \frac{J - J_3}{J} \omega_3 \right)$



$\underline{\omega}$ beschreibt einen
Kreiskegel („Polkegel“)
um die Fixachse
mit Öffnungswinkel

$$\tan \alpha = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_3}$$

Folgerung für den Drehimpuls $\underline{L} \neq \text{rot}$
(in körperfestem System)

$$\underline{L}_{rel} = \underline{J} \cdot \underline{\omega} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ J \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ J_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

Umschreiben der 3. Komponente:

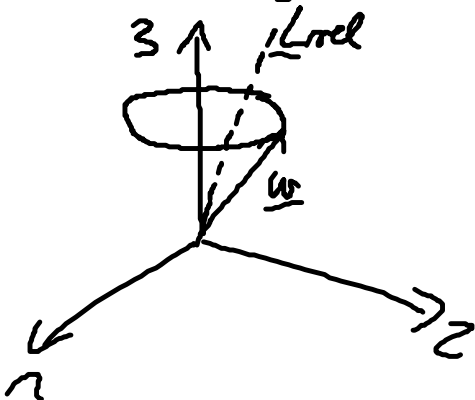
$$J_3 \omega_3 = J \omega_3 + (J_3 - J) \omega_3$$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = J \cdot \underline{\omega} + (J_3 - J) \omega_3 \underline{j}_3$$

\Rightarrow Auch der Drehimpuls rotiert

(im Körperfesten System!) und zwar so,

dass die Vektoren \underline{L}_{rel} , $\underline{\omega}$ und \underline{j}_3 zu jedem Zeitpunkt in einer Ebene liegen!



Bewegung im raumfesten System?