Wh.:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

autonomes System. $\underline{F}(\underline{x}(t))$

Fixpunkt: $\underline{F}(\underline{x}^0) = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{\underline{x}}\Big|_{\underline{x}^0} = 0$$

lineare Stabilitätsanalyse: $\delta\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\delta x$

$\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^0$ kleine Abweichung!

$\underline{\underline{A}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\Big|_{\underline{x}^0}$ $\quad i,k = 1,\dots,n$

Ansatz:

$$\delta \underline{x}(t) = \underline{u}\, e^{\lambda t}$$

einsetzen: $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda \underline{u}$ $\longrightarrow \delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{u}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

Sei $\underline{x}^0$ ein Fixpunkt.
Wenn $\underline{x}^0$ stabil ist, so hat keiner der Eigenwerte der zugehörigen Jakobimatrix $\underline{\underline{A}}$ einen positiven Realteil

IV.3 Bifurkationen

Wir betrachten nun Systeme mit einem Kontrollparameter μ

Annahme: Dynamischer Fluss $\underline{F}$ hängt stetig differenzierbar von μ ab

$\Longrightarrow$ Auch die Fixpunkte $\underline{x}^0$ und die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ verändern sich stetig mit μ

Bifurkation:

Kritischer Wert μ_c, bei dem sich die Anzahl der Fixpunkte oder auch ihre Stabilität schlagartig ändern!

Beispiele:

Beschränkung zunächst auf $n=1$

$\boxed{\text{Annahme: } \mu \text{ reell}}$

$$\dot{x} = F(x,\mu) = \mu - x^2$$

Fixpunkte $\dot{x}^0 \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow x^0_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$

Stabilität: $\delta\dot{x} = A x$ mit $A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x^0} = -2x\big|_{x^0} = \mp 2\sqrt{\mu}$

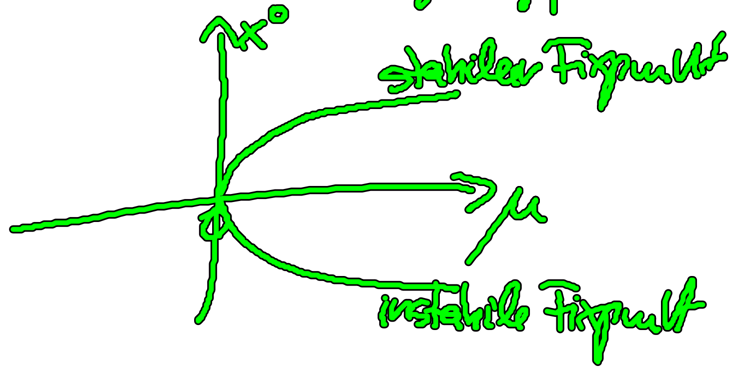
$\Longrightarrow x_1^0 = \sqrt{\mu}$ stabil (da $A<0$)

$x_2^0 = -\sqrt{\mu}$ instabil (da $A > 0$)

$\delta x(t) \sim e^{2\sqrt{\mu}t}$

Falls $\mu < 0$: Es gibt keinen stabilen Fixpunkt

$\mu_c = 0$ bildet Verzweigungspunkt



"Sattel-Knoten-Verzweigung"

Beispiel

b) $\underline{\text{Transkritische Bifurkation}}$

$\dot{x} = \mu x - x^2$

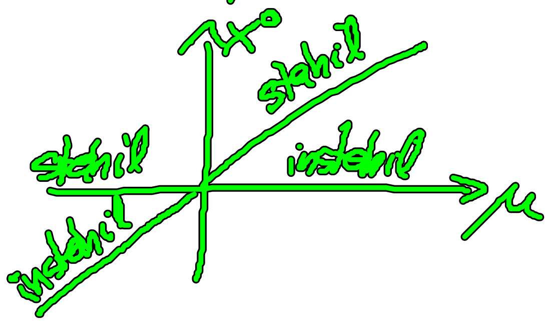
$= x(\mu - x) \Rightarrow$ Fixpunkte: $x_1^0 = 0$

$x_2^0 = \mu$

$A = \frac{dF}{dx}\Big|_{x^0} = (\mu - 2x)\Big|_{x^0}$

$\Rightarrow x_1^0 \begin{cases} \text{stabil für } \mu<0 \\ \text{instabil " } \mu>0 \end{cases}$; $x_2^0 = \begin{cases} \text{instabil } \mu<0 \\ \text{stabil}, \mu>0 \end{cases}$

Illustration:



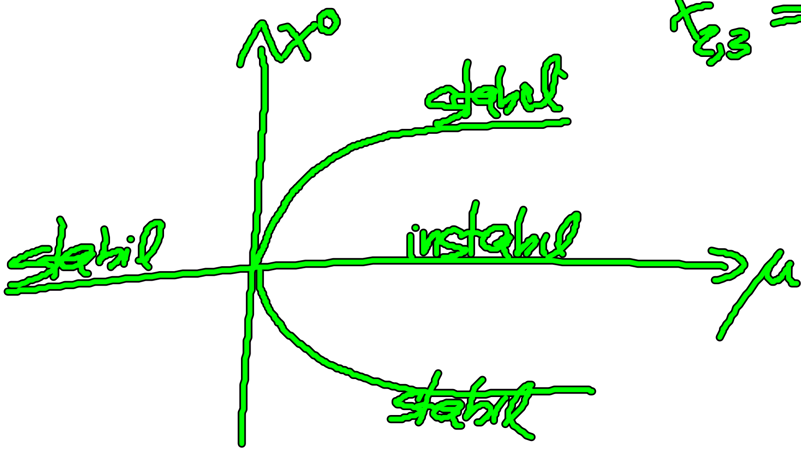
$\mu_c = 0$

c) „Stimmgabel-Bifurkation"

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$$

Fixpunkte: $x_1^0 = 0$

$x_{2,3}^0 = \pm\sqrt{\mu}$ $(\mu>0)$



$$A = \frac{df}{dx}\Big|_{x^0} = (\mu - 3x^2)\Big|_{x^0} \Rightarrow x_1^0 \text{ stabil für } \mu<0$$

Beispiel n=2

Hopf-Bifurkation

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2) x_1 \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 + x_1 - (x_1^2 + x_2^2) x_2 \end{cases}$$

Vereinfachung durch Polarkoordinaten

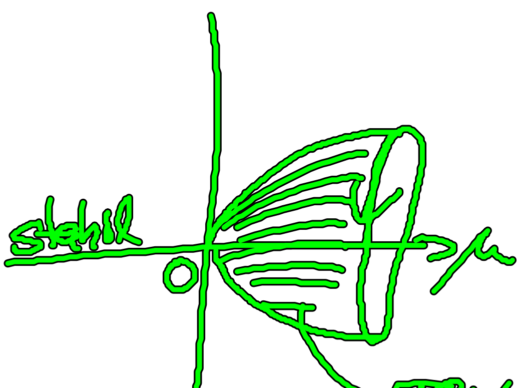
$$x_1 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\varphi$$

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \longrightarrow \text{bei } \mu_c = 0 \text{ Stimmgabel-Bifurkation}$$

$$\dot{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = t + \text{const}$$

r und φ entkoppelt

Illustration der Hopf-Bifurkation



IV.4. Lyapunov-Exponenten

Eine Bewegung (Trajektorie) heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängig

Betrachte System in 2 Raumdimension

Bahn des Teilchens sei durch $\Phi(t)$ beschrieben

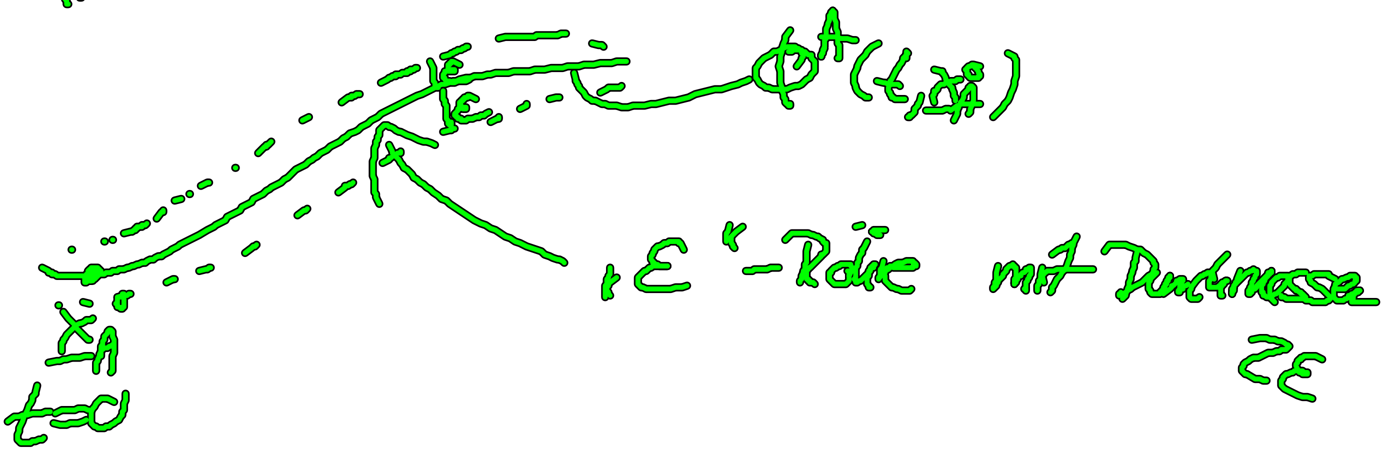
Betracht: Teilchen der Masse m_A

$\Phi^A(t, \underline{x}_A^0)$ Bahn des Teilchens mit Startwert $\underline{x}_A^0$ bei $t=0$

es gebe nun eine weitere Bahn in der Nähe

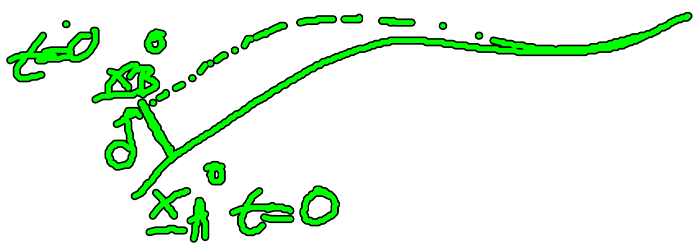
$\Phi^B(t, \underline{x}_B^0)$ $\underline{x}_B^0$ Startpunkt bei $t=0$

a) „bahnstabil"



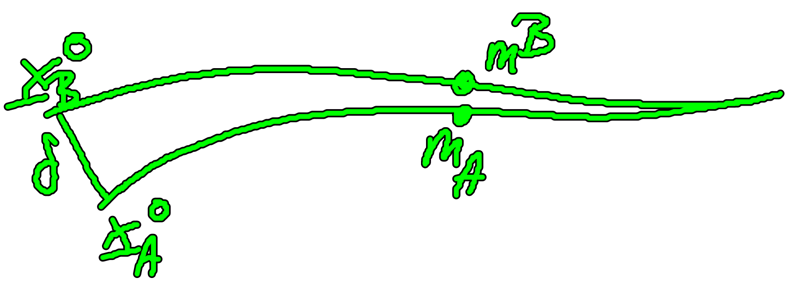
Die benachbarte Bahn Φ^B bleibt für alle Zeiten in einer ε-Röhre um die Bahn Φ^A

b) „asymptotisch stabil"



Der Abstand der Bahnen verschwindet für $t \to \infty$

c) „Lyapunov-stabil"



Der Abstand der aktuellen Positionen verschwindet für $t \to \infty$

~~[illegible]~~ Wie kann man beschreiben (quantifizieren), ob sich Bahnen aufeinander zu- oder wegbewegen?

→ Lyapunov-Exponent

Vorgehensweise: Linearisierung der Dynamik um eine Lösungskurve $\phi(t, x_A)$

Idee (Details z.B. bei Scheck)

$$|\phi(t, x_A^0) - \phi(t, x_B^0)| \sim e^{\lambda t}$$

wobei $x_B^0 = x_A^0 + \delta$, δ klein

λ : „führende Lyapunov-Exponent"

2 Fälle:

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen werden exponentiell gedämpft!

$\lambda > 0$: Exponentielles Auseinanderlaufen → Chaos