Elektrodynamik

Sprechstunde: Die 13-14

andreas.knorr@physik.tu-berlin.de

Inhalt:

- Historisches

- Begriffe der Feldtheorie
- Maxwellgleichg., Versuch einer Herleitg. aus der Quantenmechanik
- grundlegende Struktur und Erhaltungssätze
- formale Lösungen → Wellenausbreitung
- Materie als Quelle der Maxwellgl.
- Felder v. Punktladungen
- WW von Materie - Felder (Metalle, Isolatoren ...)
- Erzeugg. v. elektromagn. Strahlg.
- Optik: Brechg., Reflexion, Streuung, Beugung
- Führung / Speicherg. v. Wellen
- relativistische Formulierg. der Maxwellgl.
- Quantisierung d. Lichts
- Einführg. in Laser / nichtlineare Optik

1) Historische Bemerkungen

- C. A. Coulomb (1736 - 1806) Kraftgesetz
- J.B. Biot (1774 - 1862), S. Savart (1791 - 1841)
  Magnetfeld von Strömen
- M. Faraday (1791 - 1867) Induktionsgesetz
- J. C. Maxwell (1831 - 1879)
  vereinheitlichte Feldtheorie (El + Mag)
- H. A. Lorentz (1853 - 1928)
  Kraft auf Ladg. im Feld
- H. Hertz (1857 - 1894) elektromagn. Welle
- A. Einstein (1879 - 1955) Elektrodynamik bewegter Körper
- W. Heisenberg (1901 - 1976)
  Quantisierg. der Ladungsträger

- P. Dirac (1902 - 1984)

  Quantisierung d. em. Felds

- N. Basov, C. Schawlow, C Towns

  Laser (~ 50er Jahre)

- heute: Manipulation einzelner Photonen

  J. Kimble, A. Zeilinger

<u>Elektrodynamik</u>

Felder E, B
Maxwellgleichungen

$\longleftrightarrow$

Ladungen, bewegt
Lorentzkraft
(Schrödingergl.
Newtongl.)

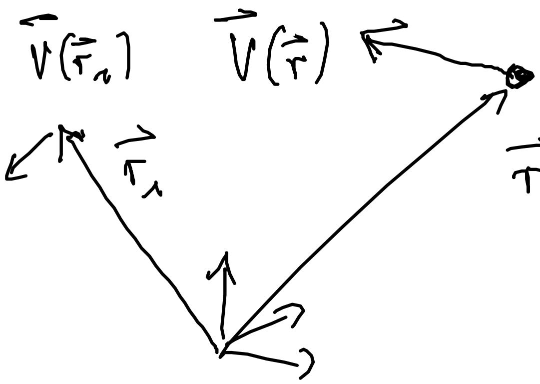
Feld- und Ladungsdynamik
muß selbstkonsistent gelöst werden

z. B. Strahlungsdämpfung

2.) Erinnerg. an die Begriffe der Feldtheorie

2.1. Vektorfelder haben Charakter

elektromagnetische Effekte werden typischerweise über Felder beschrieben (Raum / Zeitpunkt)



t = konstant (Schnappschuß)

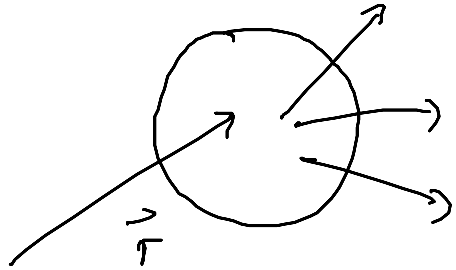
• physikalische Größe

mgl. auch Zuordnung eines Skalars $\phi(\vec{r})$

Frage: wie kann man solche Felder charakterisieren?

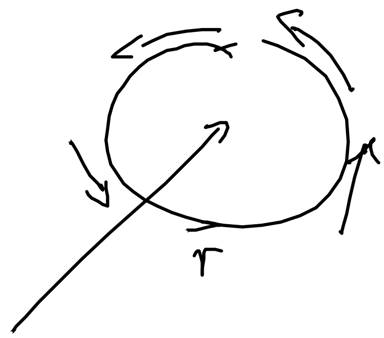
die Größen zur Charakterisierg. heißen Quellendichte, Wirbeldichte und werden mit Nablaoperator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$ (symbolische Schreibweise)

Quelldichte eines Felds „div $\vec{V}(\vec{r})$"



quellen die Feldlinien aus dem Punkt oder versinken sie ?

Wirbeldichte eines Felds „rot $\vec{V}(\vec{r})$"



wirbeln die Feldlinien am Punkt $\vec{r}$?

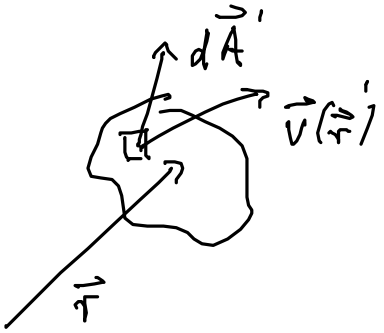
2.2. Quell- und Wirbeldichte

2.2.1. Quelldichte eines Vektorfelds

berechne den Fluß eines Felds $V(\vec{r})$ durch die geschlossene Oberfläche um den Punkt $\vec{r}$ um das Volumen V, $V \to 0$ und Bezug auf V

Quelldichte: $\lim\limits_{V \to 0} \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} d\vec{A}' \cdot \vec{V}(\vec{r}') = \operatorname{div} \vec{V}(\vec{r})$

pro Volumen

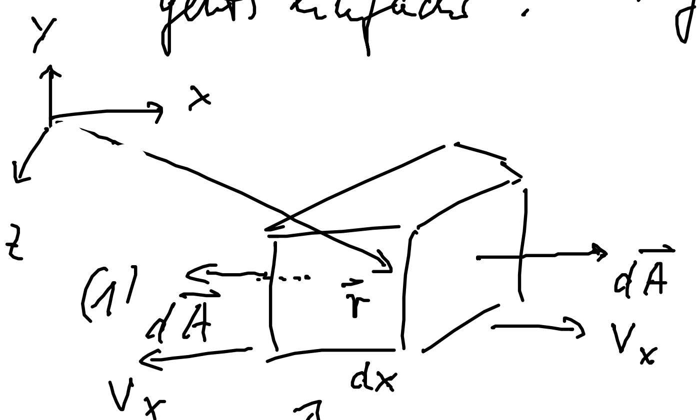


Oberflächenintegral um $\vec{r}$ herum

sammelt alle Beiträge auf und „zählt" die durchstoßenden Feldlinien

(Netto!)

gehts einfacher? → ja, in Koordinaten!



Kleiner Würfel

Richtg. d. Oberflächenelements 1

$$\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{dx\,dy\,dz} \Big(-V_x\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy \cdot dz$$

Oberfl.element 1

Würfelvolumen

$$+ V_x\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz \Big)$$

$+$ y- Richtg , z - Richtg

$$\lim_{\substack{V\to 0\\ dx\to 0}} \frac{1}{dx\,\cancel{dy}\,dz}\left(\cancel{-V_x(x)} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\,dy\,dz + \cancel{V(x)} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\,dy\,dz \right.$$

$$\left. + \text{ y-, z- Richtg analog}\right)$$

$$= \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r})$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r})}$$

<u>Beispiel</u>: suchen ein elektrisches Feld ohne Divergenz mit Kugelsymmetrie:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\ ,\quad \vec{E} = f(r)\,\vec{e}_r$$

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\vec{e}_r\,\partial_r + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\cdot\left(f(r)\vec{e}_r\right)$$

$$= \partial_r f(r) + f(r)\frac{1}{r}\vec{e}_\vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + \vec{e}_\varphi\cdot\frac{f(r)}{r\sin\vartheta}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi)$$

$$\left(\partial_\vartheta \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta \quad , \quad \partial_\varphi \vec{e}_r = \sin\vartheta\, \vec{e}_\varphi\right)$$

ohne Beweis, siehe ÜA)

$$0 = 2f + r\,\partial_r f$$

Konstante

$$\Rightarrow f(r) = \frac{c}{r^2}$$

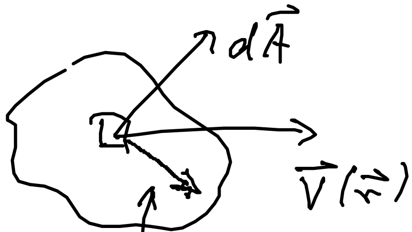
$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{c}{r^2}\,\vec{e}_r$$

ist das Feld einer Punktladg.

2.7.2. Rotation eines Vektorfelds

um die Wirbel um $\vec{r}$ zu bestimmen geht man von der Zirkulation auf der Oberfläche um $\vec{r}$ aus:

Wirbeldichte $\quad \mathrm{rot}\,\vec{V}(\vec{r}) = \lim\limits_{V\to 0} \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} d\vec{A}' \times \vec{V}(\vec{r}')$



Anteil auf der
Oberfläche um
zu sehen, was
„drum rum läuft"

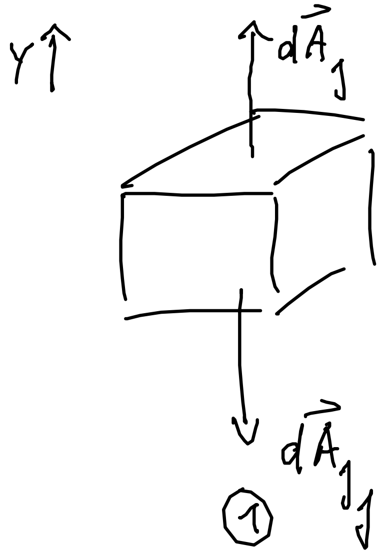
Einfach wieder in kartesischen Koordinaten:

$$(\mathrm{rot}\, V)_i = \frac{1}{dx\,dy\,dz} \Big(-\varepsilon_{ijk}\, dA_j V_k(\vec{r} - \tfrac{dx_j}{2}\vec{e}_j)$$

1

$$+ \varepsilon_{ijk}\, dA_j V_k(\vec{r} + \tfrac{dx_j}{2}\vec{e}_j) \Big)$$

$(x, y, \text{oder } z)$



$$= \frac{1}{\cancel{dx\,dy\,dz}} \varepsilon_{ijk}\, \cancel{dx_i\,dx_k} \cdot dx_j\, \partial_{x_j} V_k$$

von Taylor

$$= \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})\right)_i$$

$$\boxed{\text{rot}\, \vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})}$$

2.3. Vektoridentitäten

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f(\vec{r})\right) = 0 \,, \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})\right) = 0$$

siehe ÜA

2.4. Helmholtz Theorem

Jedes Vektorfeld kann in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil aufgeteilt werden

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_t$$

die Unterscheidung in longitudinale u. transversale Felder ist wie folgt:

Wenn $\vec{k}$ der Wellenvektor (Ausbreitungsrichtg) dann für „l": $\vec{k} \parallel \vec{V}_k$ ← Fouriertransformierte

„t": $\vec{k} \perp \vec{V}_k$ ← der Felder im Ort

genaue Formel in der ÜA

$$\vec{V}_l = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi} \int dr'^3 \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)$$

$$\vec{V}_t = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int dr'^3 \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_l$$

Alle Felder sind durch Angabe der Quellen- und Wirbeldichte <u>eindeutig</u> bestimmt. → Maxwellgl.