3. Maxwellgleichungen

Bewegungsgleichungen f. elektromagnetische Feld

3.1. Lagrangegleichungen für Felder

(auch Voraussetzung f. Quantisierung der Felder)

3.1.1. Erinnerung

man bestimme L (Lagrangefunktion) f. Teilchen

und bilde:

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \frac{\partial}{\partial q} L$$

Bewegungsgleichg. f. Teilchen

<u>Frage:</u> ist das auf Felder übertragbar

Lagrangegleichg. aus Wirkprinzip $\delta S = 0$

3.1.2. Wirkprinzip für Felder

in Analogie zu Teilchen $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

$$S = \int dt\, L\left(\Upsilon_i, \underbrace{\partial_j}\Upsilon_i, \partial_t \Upsilon_i\right)$$

<u>Felder:</u> $\Upsilon_i(\vec{r}, t)$; $\frac{\partial}{\partial x_j}\Upsilon_i = \Upsilon_{i|j}$ $\quad x_j = x, y, z$

numeriert die Felder

Zeit und Raum wird <u>gleichrangig</u> behandelt

→ Ableitg. v. Ort einbeziehen und

$$S = \underline{\int dt \int d^3r} \; \mathcal{L}\left(Y_i, \partial_j Y_i, \partial_t Y_i \right)$$

↓

Lagrangedichte $\mathcal{L}$

Wirkprinzip analog zu Teilchen: $\delta S = 0$

→ Gleichg. f. Felder

3.1.3. Lagrange - Feldgleichungen

klein Variation

Variation von Feldern: $Y_i = Y_i^0 + \delta Y_i$

„wahre Feld"

$$S = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L}\left(Y_i^0 + \delta Y_i, \; \partial_j Y_i^0 + \partial_j \delta Y_i, \; \partial_t Y_i^0 + \partial_t \delta Y_i \right)$$

Taylorentwicklung um Y_i^0 mit kleinem δ

partiell integrieren

$$= S_0 + \int dt \int d^3r \left(\partial_{Y_i^0} \mathcal{L}\, \delta Y_i + \partial_{Y^0_{i|j}} \mathcal{L}\, \partial_j \delta Y_i + \partial_{Y^0_{i|t}} \mathcal{L}\, \partial_t \delta Y_i \right)$$

$$\underbrace{S - S_0}_{\delta S} = \int dt \int d^3r\, \delta Y_i \underbrace{\left(\partial_{Y_i^0} \mathcal{L} - \partial_j \partial_{Y^0_{i|j}} \mathcal{L} - \partial_t \partial_{Y^0_{i|t}} \mathcal{L} \right)}_{0}$$

sind unabhängig:

i.a. Summe über verschiedene Felder u. Koordinaten

<u>Lagrangefelder für Felder:</u>

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i|t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i|j}}$$

3.1.4. Rätselraten der Lagrangedichte

ist nicht so einfach wie in Mechanik $L = T - V$

man lernt aus Erfahrung und bestätigt oft bekannte Feldgleichungen

Bsp: Schrödinger feld $\psi(\vec{r},t)$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=x,y,z} \psi^*_{|i} \psi_{|i}}_{\text{kinetischer Anteil}} - U\psi^*\psi$$

$\psi_{|i} = \partial_{x_i}\psi$ potentieller Energiedichte

„to find $\mathcal{L}$ you have to fiddle around …"

(Feynman)

wir haben 2 Felds $i=1 \rightarrow \psi$, $i=2 \rightarrow \psi^*$

nach L-Gleichung nach ψ^*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{i\hbar}{2}\partial_t \psi - U\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{|t}} = -\frac{i\hbar}{2}\psi$$

$$\sum_j \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{|j}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_j \partial_j \sum_i \delta_{ij}\psi_{|i} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_j \partial_j^2 \psi$$

alles in L- Gleichg. einsetzen:

$$\frac{i\hbar}{2}\partial_t\psi - U\psi = -\frac{i\hbar}{2}\partial_t\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

$$i\hbar\,\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi$$

Schrödingergleichg. reproduziert

3.2. Elektromagnetisches Feld als Eichfeld

in QM: wenn Wellenfunktion um Phase

$$\psi \to \psi e^{i\chi'}$$

verändert wird, bleiben Theorie (Schrödingergl.) und Ergebnisse ($|\psi|^2$, $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$) unverändert

→ Man hat Eichfreiheit der Phase!

Frage: kann man χ' auch $\chi'(r,t)$ wählen?

ja, wenn das elektromagnetische Feld

eingeführt wird.

wähle Phase: $\chi' = \frac{q}{\hbar}\chi(r,t)$ $\quad$ später „Ladung", im Moment unbekannt

Versuch die Schrödingergl. anzusehen mit $\psi \to \psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}$

$$i\hbar\partial_t\left(\psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}\right) = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 + U\right)\psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}$$

Wenn $\chi = \chi(r,t)$, so muß man weiterrechnen:

$$i\hbar(\partial_t\psi)\underline{e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}} + i\hbar i\frac{q}{\hbar}(\partial_t\chi)\psi\underline{e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}} =$$

$$\frac{1}{2m}\frac{\hbar}{i}\nabla\left(\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi\right)e^{i\frac{q}{\hbar}\chi} + q(\nabla\chi)\psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}\right) + U\psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}$$

$$= \underline{e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + q\nabla\chi\right)^2 + U\psi\underline{e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}}$$

$$\longrightarrow i\hbar\partial_t\psi = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + q\nabla\chi\right)^2 + U + q\,\partial_t\chi\right)\psi$$

Schrödingergl. für das neue ψ

diese hängt v. Phase χ ab $\Rightarrow$ schlecht, denn

das ändert die Theorie

Idee: neue Felder $\vec{A}$, ϕ einzuführen, um

die Schrödingergl. zu „retten".

neue Schrödingergleichung mit $\vec{A}$ u. ϕ sei:

$$i\hbar\,\partial_t \psi = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 + U + q\phi\right)\psi$$

wieder die Eichtransformation $\psi \to \psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}$

<u>Forderung</u>: $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi$

$$\phi \to \phi - \partial_t \chi$$

$$i\hbar\,\partial_t \psi = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \underline{\underline{q\nabla\chi}} - q\vec{A} - \underline{\underline{q\vec{\nabla}\chi}}\right)^2\right.$$

$$\left. + U + q\phi + \underline{\underline{q\,\partial_t\chi}} - \underline{\underline{q\,\partial_t\chi}}\right)\psi$$

man fordert Eichinvarianz und findet dabei

2 neue Felder, die offensichtlich mit ψ wechselwirken

jetzt: ein Schönheitsfehler: wir wissen noch nichts

über das „freie Feld" ohne Materie!

3.3. Freies Maxwellfeld

d.h. ohne Materie

Richtlinien: 1) man nimmt Quadrate von $\vec{A}$, ϕ in

$\mathcal{L}$ auf, um analog zu $\mathcal{L}(\psi)$ vorzugehen

2) Eichbedingg. erfüllen

3) mgl. symmetrische Formulierg. in

Raum - Zeit, $\phi - \vec{A}$

wird erfüllt durch die Größen:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_i \phi + \partial_t A_i \\ &\partial_i A_j - \partial_j A_i \end{aligned}\right\}$$ sind eich invariant

$\rightarrow$ $\mathcal{L}$ aus konstruieren:

<u>Def</u>: $E_i = -\left(\partial_i \phi + \partial_t A_i\right)$ i-te Komponente d. elektr. Feldes

$B_k = \varepsilon_{kij}\, \partial_i A_j = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_k$ k-te Komponente d. magn. Feldes

raten $\mathcal{L}$ $\longrightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{\sum_i \left(\partial_i \phi + \partial_t A_i\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \sum_k \left(B_k\right)^2}_{\text{nehmen die Quadrate analog } \mathcal{L}(T)}$$

$\nearrow$ freie Maxwellfeld

ε_0, μ_0, Vorzeichen müssen mit Einheitensystem und Erfahrung in Übereinstimmung gebracht werden

3.4. Ableitung gekoppelter Feld – Materie gleichungen

Ansatz in $\mathcal{L}$: $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Freier Anteil d. Felds}} + \mathcal{L}_{\text{Schrödinger mit } \vec{A},\, \phi}$$

↑

gesamte System

$\vec{E}, \vec{B}, \psi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i \left(\varepsilon_0 \left(A_{i|t}^2 + (\partial_i \phi)^2 + 2\partial_i \phi\, A_{i|t}\right) - \mu_0^{-1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i^2\right)$$

$$+ \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \psi_{|t} - \psi\, \psi^*_{|t}\right) - q\phi\psi^*\psi + \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + q\vec{A}\right)\psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi$$

3.4.1. Schrödingergleichung

Anwendg. der $\mathcal{L}$-Gleichg. führt auf

$$i\hbar\,\partial_t \psi = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi\right)\psi$$

3.4.2. Maxwellgleichungen

a) Auswertung f. ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}} + \sum_j \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,j}}$$

$\downarrow$

$$\underbrace{-q|\psi|^2}_{-\rho} = 0 + \underbrace{\varepsilon_0 \sum_j \partial_j \left(\partial_j \phi + A_{j,t}\right)}_{\varepsilon_0\left(\Delta \phi + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Potentialgleichg. f. skalares Potential } \phi \\[1em] \Delta \phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\partial_t \vec{A} \\[1em] q|\psi|^2 \text{ wird als Ladungsdichte interpretiert} \\ q \rightarrow \text{Ladung}\end{array}}$$

wenn $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$ eingeführt wird,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$ man erhält die Quelleglichg. des elektrischen Felds $\vec{E}$.

„Die Quellen des elektrischen Felds werden durch die Ladungsdichte bestimmt."

b) Auswertung für das Vektorpotential $\vec{A}$

ÜA: $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

$$\boxed{\begin{gathered} -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\partial_t\phi \\ \text{mit } \vec{j} = \frac{q}{2m}\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi + \text{h.a.} \\ \text{als Stromdichte interpretiert} \end{gathered}}$$

mit $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} + \mu_0 j$$

Die Wirbel des magnetischen Felds sind durch Stromdichte und Zeitableitung d. E-Felds gegeben

es fehlen noch 2 Maxwellgleichungen:

wissen: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{A} = \vec{\nabla} \times (-\vec{E} - \vec{\nabla}\phi)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0)$$

$$\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Die Wirbel des elektrischen Felds sind durch die Zeitableitung d. $\vec{B}$-Felds gegeben

„Minus" ≙ Lenz'sche Regel

weil $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad / \vec{\nabla} \cdot$

$$(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0)$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{Das Magnetfeld hat keine Quellen}\end{gathered}}$$