

3.5 Die vollständigen Gleichungen des elektromagnetischen Felds

Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Quelldichte von \vec{E} prop. zu Ladungsdichte ρ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Quelldichte von \vec{B} verschwindet
(Keine Anfangs- bzw. Endpunkte von
Feldlinien)

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 Wirbelstärke von \vec{E} gegeben durch zeitliche Ändg. d. Magnetfelds

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

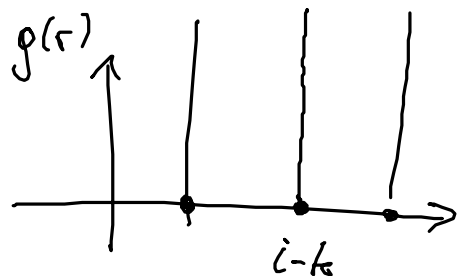
Wirbelstärke von \vec{B} wird durch Stromdichte und zeitliche Ändg. d. elektr. Felds bestimmt

Zur selbstkonsistenten Lösung muß man Materialgleichungen zu den Feldgleichungen (Maxwell) hin z. fügen

$$\rho = q |\psi|^2, \quad \vec{j} = \frac{q}{2m} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right) \psi + \text{h. c.}$$

quantenmechanisch durch Schrödinger-Gleichung bestimmt

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$



ist klassische Definition eines Systems von Punktladungen.

Vollkommen integral gibt die Ladung im betrachteten Raum wieder

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

gesucht nach $\vec{r}_i(t) = ?$

Newtongleichung: $\frac{d}{dt} (m \dot{\vec{r}}_i(t)) = \vec{F}(\vec{r}_i, t)$

↑
Lorentzkraft auf Teilchen mit Ladung q in einem Feld

3.6. Klassifizierung v. Beschreibungen

a) "Quantenelektrodynamik, Quantenoptik"

Teilchen + Feld quantenmechanisch

b) "halbklassische Theorie"

Teilchen: quantisiert, Feld: klassisch

c) „klassische Elektrodynamik“

beide klassisch

3.7 Bilanz

gibt es analog zu klassischer Mechanik Bilanz, also

$$\frac{d}{dt} X = \text{Quellterm} \quad (= 0 \rightarrow \text{Erhaltungssatz}) ?$$

3.7.1 Ladungsbilanz (Kontinuitätsgleichg.)

Ladung und Strom sind miteinander verbunden:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ &= \sum_i q_i \delta(x - x_i(t)) \delta(y - y_i(t)) \delta(z - z_i(t)) \end{aligned}$$

Bilanz des Ladungsdiv

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(\vec{r}, t) &= \sum_i q_i \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_i(t)) \right] (-\dot{x}_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - y_i) (-\dot{y}_i) \delta(z - z_i) \right. \end{aligned}$$

$$+ \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \left. \frac{\partial}{\partial z} \delta(z-z_i) (-\dot{z}_i) \right\}$$

$$= - \sum_i q_i \vec{\nabla} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$= - \vec{\nabla} \cdot \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\boxed{\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Kontinuitätsgleichung} \\ \downarrow \\ \text{Strom u. Ladungsdichte} \end{array} \right\}$$

zeitliche Änderung der Ladungsdichte zieht

Entstehg. / Weggehen von Feldlinien der Stromdichte

und sich.

Interpretation:



(V)-Oberfläche

$$\int dV \dot{\rho} + \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\dot{\rho} + \oint_{(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} = 0$$

Satz von Gauß

$$Q = \int dV \rho$$

\overline{I} - Strom durch (V)

↑
Gesamtldg. im
Volumen

$$\dot{Q} = -\overline{I}$$

Die zeitliche Änderung der Ladung in V ist
durch den Strom \overline{I} gegeben.

3.7.2. Energiebilanz (Poynting Theorem)

Energiebilanz f. em. Felder:

$$\mathcal{L}_{\text{für Feld}} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \rightarrow \mathcal{H}_{\text{für Feld}} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

Vielleicht \vec{E} -Dichte ?!

Bilanz für die \vec{E} -Dichte $w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$?

Start :

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\vec{B} \cdot (-1)} = - \underbrace{\partial_t \vec{B}}_{\dots\dots\dots}, \quad \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\dots\dots\dots} = \underbrace{\mu_0 \vec{j}}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}}_{\vec{E}}$$

addieren

$$-\underbrace{\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{\dots\dots\dots} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{|\vec{B}|^2}_{\vec{B} \cdot \vec{B}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{|\vec{E}|^2}_{\dots\dots\dots} + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \dots \quad \parallel \quad \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{el}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

die Zeitableitung der Dichte der em. Energie

Divergenz d. Energiestroms

Verlust f. die elektromagnetische Feldenergie durch Abgabe der Energie an Ladungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right)$$

Analogie zur Kontinuität

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{Energiestrom dichte vektor " Poynting vektor"}$$

$$w_d = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \text{Verlustterm (zu interpretation)}$$

sehen um an:

$$A = \int dV \int dt' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}, t')}_{\text{Leistungs dichte}} \xrightarrow{\hat{=}} \text{Arbeit an den Teilchen durch das elektromagnetische Feld}$$

\nearrow um "Dichte" Weg zu bekommen
 \nwarrow um v. Leistung \rightarrow Arbeit zu kommen

$$= \int dV \int dt' \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t')) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t')$$

$$= \sum_i q_i \int dt' \vec{r}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t')$$

$$= \sum_i q_i \int dt' \frac{d\vec{r}_i}{dt'} \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t')$$

Parameterdarstellung eines Kurvenintegrals

$$= \sum_i q_i \int d\vec{r}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) = \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_L$$

\uparrow Bahnlänge \uparrow Bahnlänge \uparrow Kontaktkraft
 \uparrow alle Teilchen

} Definition der Arbeit in
Mechanik

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ beschreibt die Verlustleistungsdichte die durch Arbeit an den Punktladungen im elektromagnetischen Feld verrichtet wird

- warum taucht \vec{B} -Feld nicht auf?

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B} \right)$$

\uparrow
trägt nicht zur Arbeit bei

Anmerkung: Es gibt auch eine Impulsbilanz f. das elektromagnetische Feld.

3.9. Weiteres Vorgehen

- es gibt homogen u. inhomogen Maxwellgl.

$$\begin{matrix} (\rho = j = 0) & (\rho \neq 0 \\ \text{dh. Vakuum}) & j \neq 0) \end{matrix}$$

+ Rand + Anfangs-
wert problem

↙
Lsg. Vakuum (1)

↘
Lsg. mit Punktladg. od komplizierter
Metris (Metalle) (4)

- es gibt zeit abhängige und zeit unabhängige Problem

$$\underbrace{(\partial_t \neq 0)}$$

wellenartige Lösungen
(Erzeugung v. Wellen,
Ausbreitung) (3)

$$\underbrace{(\partial_t = 0)}$$

Gleichung od. statisch Felds

(5)

4) Zeit abhängige Lösungen d. Maxwellgl.

f. Vakuum + Punktladung (bewegt)

4.1. Wellen im Vakuum

Vakuum: $\rho = j = 0$, freier

wollen Wellenlösungen können existieren?

4.1.1. Wellen gleichg. f. Vakuum

$$\text{f. } \rho = 0 = \vec{j} \text{ folgt: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

gekoppelt gleichg. $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, entkoppeln:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{\substack{\text{rot rot} \\ \text{rot grad} \\ \text{grad rot} \\ \text{div grad}}} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$\begin{aligned} (-\Delta + \underbrace{\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot}) \vec{E} &= -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \\ &= 0 \text{ denn } \rho = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0$$

gilt für alle Komponenten E_i :

analog: $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} = 0$

Ziel: in vollständiges System von Lösungen zu finden,
um alle mögl. Lösungen danach zu entwickeln,

in kartesischen Koordinat \rightarrow eben Wellen

in Kugel- und Zylinderkoordinat \rightarrow Kugelwellen / Hohlwellen.

partielle Differentialgleich. keine hohe Lösungsvielfalt im
Vgl. zu gewöhnlich Dgl.

Erinnerung an gewöhnliche: n -te Ordnung \rightarrow n unabhängige Funktionen
und n -Koeffizienten

partielle Dgl.: n -Ordnung der Dgl. (höchste Anzahl der Ableitungen)
 p -Variable

\rightarrow Lösung setzt sich zusammen aus n unbestimmten Fkt.
mit je $(p-1)$ Variable

zweidimensionale Wellengleichung: als Beispiel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_x = 0 \rightarrow n=2, p=2$$

2 unbestimmte Funktionen die von je 1 Variable abhängen:

$$E_x = f\left(x \pm ct\right)$$

\nearrow
beliebig, unbestimmt, kann alles sein

\rightarrow keine Lösungsmangelfähigkeit

→ man muß Rand - bzw. Aufg.beding.,
und darüber wie f zu bestimmen,
z.B. im ∞ oder auf Kugel