4.4. Anwesenheit von Ladungen

geben Ladungs- und Stromdichte vor und versuche

$$\rho \neq 0 \neq \vec{j}$$

die inhomogenen Lösung der Maxwellgl. zu finden

<u>allgemeinen Lösung:</u>

$\underbrace{\text{allg. homogene Lsg.}}_{\text{Randbedingg. + Anfangsbedingg.}}$ + $\underline{\text{inhomogene Lsg.}}$ $(\rho \neq 0 \neq j)$

Randbedingg. + Anfangsbedingg.

man verwendet das skalar / Vektorpotential

<u>Def</u> der Felder über die Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \,, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

$\rightarrow$ alles auf Potentiale verschoben.

die Gleichg. f. die Potentiale kamen aus $\mathcal{L}$ - Gleichungen, siehe 2. Vorlesung:

$$\nabla^2 \phi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Gleichg. für } \phi$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi\right) = -\mu_0 \vec{j}$$

Gleichg. f. A-Feld

Idee: $\rho, \vec{j}$ als gegeben annehmen

$\vec{A}, \phi$ - Gleichg. lösen $\longrightarrow$ $\underline{\underline{\vec{E}, \vec{B}}}$ $(\vec{A}, \phi)$

$\vec{E}, \vec{B} \; (\rho, \vec{j})$

die Potentialgleichg. sind kompliziert und man verwendet die Eichfreiheit (χ - Funktion) um diese Gleichg. zu vereinfachen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \\ \phi &\to \phi' = \phi - \partial_t \chi \end{aligned}}$$

Eichfreiheit, χ kann beliebig gewählt werden

mit Hilfe v. χ kann man die Potentialgleichg. entkoppeln: Gleichg. f. ϕ, $\vec{A}$ in sich „allein".

Zwichtige Eichg. sind

Lorenzeichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0$

Coulombeichg: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

3 wichtige Pkte warum das geht:

1) die Felder dürfen sich <u>nicht</u> ändern, wenn die Potentiale $A \to A'$, $\phi \to \phi'$ geändert werden

$$\vec{E}' = -\partial_t \vec{A}' - \vec{\nabla}\phi' = -\partial_t \vec{A} - \cancel{\partial_t \vec{\nabla}\chi} - \vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\partial_t \chi}$$

$$\rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$$

analog $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$ für $\vec{B}' = \vec{B}$

Die Felder ändern sich durch eine Eichtransformation nicht! $\Rightarrow$ die Potentiale können verändert werden, es ist egal ob man mit $\vec{A}$ bzw $\vec{A}'$, ϕ bzw ϕ' arbeitet.

Hoffng. ϕ' erfüllt eine einfachere Gleichg!

2) die Potentialgleichungen werden „formal" mathematisch für $\vec{A}, \phi$ genauso wie f. $\vec{A}', \phi'$ aussehen, aber man kann durch die Wahl v. χ, die angegeben Lorenz / Coulombeichg. machen und einfachen Pot.gl. bekommen:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' \\ \phi &\rightarrow \phi' \end{aligned}\right\}$$

an Bsp. für ϕ:

$$\nabla^2 \phi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \phi' + \cancel{\nabla^2 \partial_t \chi} + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \cancel{\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \chi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Formel gelten auch dieselbe Potentialgleichg.,
aber jetzt können zusätzlich Beding. gefordert werden
um die Gleichg. für „ ' " " einfacher zu machen indem
χ ganz konkret gewählt wird

4.4.1. Lorenzeichung

bei $\vec{A} \to \vec{A}'$, $\phi \to \phi'$ soll gelten:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi' = 0}$$

dies macht die Gleichg. sehr einfach:

$$\boxed{\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}}$$

Potentialgleichg in Lorenzgleichg
sind Wellengleichungen mit Inhomogenität $\rho, \vec{j}$.

Begründg f. Lorenzeichg. über Wahl d. Funktion χ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \chi \qquad | \text{ Trafo, } \vec{\nabla} \cdot$$

$$\partial_t \phi' = \partial_t \phi - \partial_t^2 \chi \qquad | \text{ Trafo } \vec{\nabla}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Forderg. in} \\ \text{Lorenzeichg.}}}{0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi' = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Delta\chi + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \chi = 0}_{\text{Bestimmungsgl. f. } \chi}$$

$$\rightarrow \quad \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \chi = \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t \phi}_{\text{bekannt}}$$

χ ist damit konstruiert $\rightarrow$

Lorenzeichg.

<u>Vorteile der Lorenzeichung</u>

- symmetrische Formulierg. (dieselben Gleichg. f. $\vec{A}'$, ϕ')

$\rightarrow$ einfache relativistische Schreibweise

$\rightarrow$ symmetrische Behandlung bei Näherungen

<u>4.4.2 Coulombeichg.</u>

wähle: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$ Coulombeichung

$\vec{A}'$ wird also quellfrei gewählt, Quelldichte $= 0$

wie muß man χ wählen, konstruiere:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \chi = 0$$

Fordg., welches χ erfüllt das?

χ ist die Lösg. der Poissongleichg.

$$\Delta \chi = - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

wie sehen die neuen Potentialgl. aus?

$$\nabla^2 \phi' = - \rho / \varepsilon_0 \,, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{A} = - \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{\underline{\vec{\nabla} \phi'}}$$

diese Gleichg. sind noch $\underline{\underline{\text{verkoppelt}}}$, will man nicht

wie kriegt man ϕ' los?

man setzt die Lösg. für ϕ' ein und schreibt die rechte Seite kompakt:

$$\phi'(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \text{(Vorgriff)}$$

$$\nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\partial_t \rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$$

Kontinuitätsgl.

$$= -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

partielle Integr.

$\vec{r} \to \vec{r}'$

$$= -\mu_0 \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}',t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') - \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (\text{Mathe})$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \Big(\underbrace{-\nabla'^2 + \vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\cdot}_{\vec{\nabla}'\times\vec{\nabla}'\times}\Big)\frac{\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_T(\vec{r},t)$$

$$\nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}_T$$

im Vergleich zur Lorenzeichg. steht hier

der transversale Strom!

insgesamt f. Coulombeichg.:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}_T \\ &\Delta \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}}$$

Vorteil der Coulombeichg.

→ unsymmetrische Formulierung

oft, z.B. Festkörpertheorie ist im Mittel gewählt

$\langle \rho \rangle \neq 0$, $\langle j \rangle = 0$

↑

Mittelwert

und dann $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ einfacher als

die Wellengleichung

Quantenoptik: $\phi \to$ Kernpotential
$\vec{A} \to$ Lichtfeld

} unsymmetrische Formulierg. auch günstig

$\Rightarrow$ immer problemangepaßte Anwendg v. Eichungen

4.5. Lösung der Potentialgleichungen

zunächst betracht wir die allgemeinste Gleichg.
die auftritt f. 1 Vektorkomponente

$$\Box \Psi = \underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)}_{\Box \,\hat{=}\, \text{Welleoperator}} \Psi = -4\pi f(\vec{r},t)$$

(A_i, ϕ)

allgemeine Inhomogenität

Lösg. der Poissongleichg $c \to \infty$

$\rightarrow$ löse diese allg. Gleichung

4.5.1 Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion

löse zunächst

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r},\vec{r}\,', t, t') = -4\pi\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')$$

wenn G gefunden $\rightarrow$ Lösg. Ψ

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt' \underbrace{G(\vec{r},\vec{r}',t,t')}_{\text{leichter zu bestimmen}} f(\vec{r}',t')$$

$\rightarrow$ ψ als Faltg. dargestellt über G

das ist zu zeigen:

$$\underline{\underline{\Box \psi}} = \int d^3r' \int dt' \underbrace{\Box_{\vec{r},t} G(\vec{r},\vec{r}',t,t')}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')} f(\vec{r}',t') = \underline{\underline{-4\pi f}}$$

$\uparrow$ wirkt auf $\vec{r},t$ — laut Definition

wenn G bekannt $\rightarrow$ kann ψ berechnet werden.

Was können wir noch über G sagen?

- weil keine spezielle Zeit / kein spezieller Ort in der Gl. f. G ausgezeichnet ist, kann G nur von $|\vec{r}-\vec{r}'|$, $t-t'$ abhängen

  $\nearrow$ keine Richtg. ausgezeichnet

$\rightarrow$ $G = G(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$

- G - Interpretation:

Gibt ein Feld (Wellengleichg.) das durch eine kurz zu Zeitpkt t' auftauchende Punktladg. am Ort $\vec{r}\,'$ aufgebaut wird ($\delta \hat{=}$ kurz)

- Lösungen sind: $G^{\pm} = \dfrac{\delta\left(\Delta t \mp \frac{r}{c}\right)}{r}$ (Vorgriff)

$$\Delta t = t - t' \,, \quad r = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

- Was sagt uns diese Lösung?

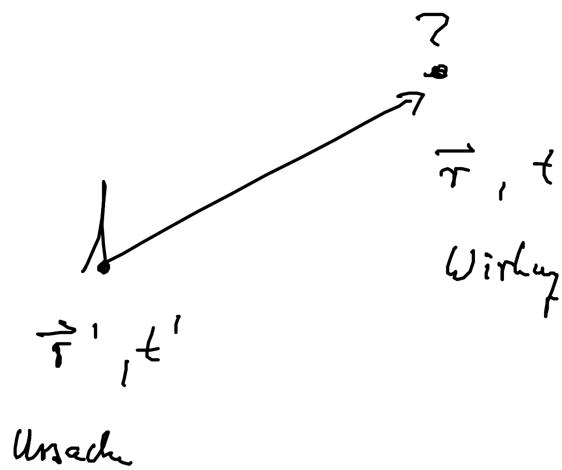
$$G^{\pm} \sim \delta\left(t' - \left(t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)\right)$$

- wir beobacht. Effekt am Ort $\vec{r}$, zur Zeit t ausgelöst durch Pkt-Ladg. am Ort $\vec{r}\,'$ zur Zeit t'
- für Erfüllg. der δ-Fkt sollte Argument Null werden:

$$t' = t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$$

<u>unteres Vorzeichen</u>:

$t > t'$



Ursache kommt vor Wirkung,
Laufzeit $\Delta t \simeq \frac{\Delta r}{c}$

„retardierte G-Fkt“
(Wirkg. verzögert)

oben Vorzeichen:

$t < t'$, Wirkg. kommt vor der Ursache

„avancierte G-Funktion“ $\longrightarrow$ physikalisch i.a. nicht sinnvoll