5.2. Gleichförmig-geradlinig bewegte Punktladung

5.2.1. Diskussion der Felder

$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \sim$ Konstante, $\dot{\vec{\beta}} = 0$

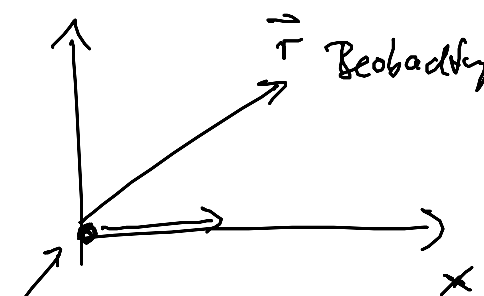
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1-\beta^2)(\vec{e}_R - \vec{\beta})}{R^2(1-\vec{\beta}\vec{e}_R)^3}\right)\Bigg|_{t'=t'(\vec{r},t)} \quad , \quad \vec{\beta} \neq 0$$

$\dot{\vec{\beta}} = 0$

relativistische Korrekturen

retardierte Zeit

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}$$



$\vec{r}$ Beobachtungspunkt zur Zeit t $\vec{E}(\vec{r},t)$

Punktladung auf x-Achse

$$\vec{r}_0(t) = v \cdot t = \dot{\vec{r}}_0 \cdot t$$

mit v = konstant

müssen diskutieren: $\vec{e}_R - \vec{\beta} = ?$, $(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)^3$ bei t'

$\vec{\beta} = \frac{v}{c}\vec{e}_x$

x-Komponente $(y_0 = z_0 = 0)$

$$\left(\vec{e}_R{}' - \vec{\beta}\right) = \frac{\vec{R}(t') - \vec{\beta}R(t')}{R(t')} = \left|\frac{x - vt' - \beta(x - vt')}{R(t')}\right.$$

„ ' " werden bei $t' = t'(\vec{r},t)$

$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$ Abstand zwischen Punktladung und Beobachtungspunkt eingesetzt, aus

$$= \frac{(1-\beta)(x - v t')}{R(t')} \qquad t' = t - \frac{x - v t'}{c} \qquad t' = \frac{t - x/c}{1-\beta}$$

$$= \frac{(1-\beta)x - v\left(t - \frac{x}{c}\right)}{R(t')}$$

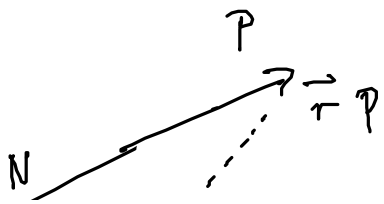
man hat das auf t zurückgeführt.

$$= \frac{x - v t}{R(t')} = \frac{x - x_0(t)}{R(t')} \Longrightarrow \frac{\vec{R}(t)}{R(t')}$$

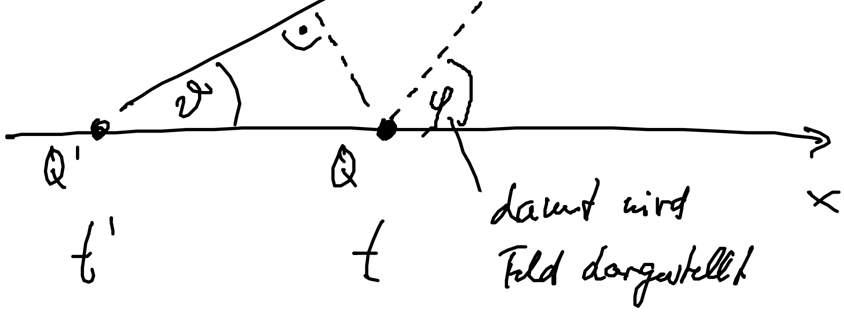
$$\boxed{\vec{e}_R\,' - \vec{\beta} \to \frac{R(t)}{R(t')}}$$

merken f. die Formel am Beginn der VL

ebenso zu bestimmen: $1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R\,' = ?$



– Feld zur Zeit t am Ort $\vec{r}$ beobachten,



damit wird Feld dargestellt

– die Punktladg. erzeugt Feld zur Zeit t' und bewegt sich aber während der Zeit $t - t'$ weiter

1) $\overline{Q'Q} = v(t-t') = \dfrac{v(x - vt')}{c} = \beta R(t')$

Strecke die die Punktladung zurücklegt

Def. der retardierten Zeit

2) $\overline{Q'N} = \beta R(t') \cos\vartheta$

3) $\overline{NP} = R(t') - R(t')\beta\cos\vartheta = R(t')(1-\vec{e}_R\cdot\vec{\beta})$

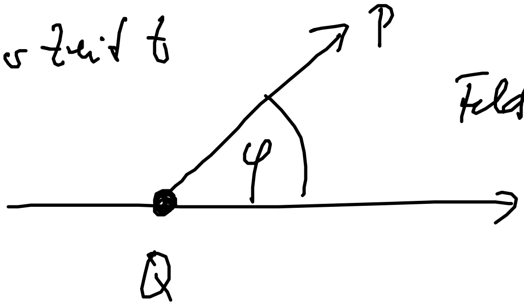
4) $\overline{NP}^2 = R^2(t) - \underbrace{R(t')^2\beta^2\sin^2\vartheta}_{\overline{QN}^2}$

$$(3)^2 = 4) \Longrightarrow R^2(t')(1-\vec{e}_R\cdot\vec{\beta})^2 = R^2(t) - R^2(t)\beta^2\sin^2\vartheta$$
$$= R^2(t)(1-\beta^2\sin^2\varphi)$$

beide Rechnungen einsetzen:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{R}(t)(1-\beta^2)}{R^3(t)(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\right)$$

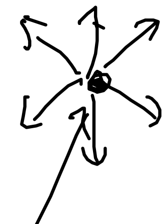
Messg zur Zeit t



Feldverteilg. als Fkt. d. ∡ φ

Was ist der Unterschied zu ruhender Punktladung:

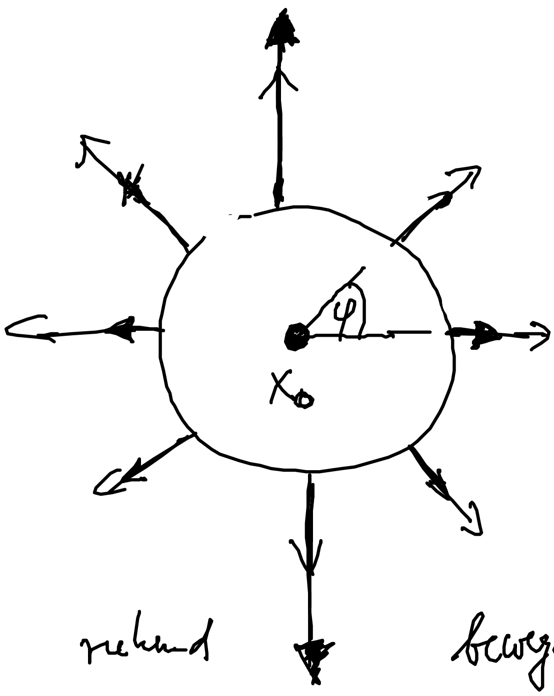
$$\vec{E}_{ruhend}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$



$\beta = 0$

Verhältnis $\underbrace{|\vec{E}| / |\vec{E}_{ruhend}|}$ zu fester Zeit

$$\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi = 0, \pi \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta^2 < 1 \\ 1/\sqrt{1-\beta^2} > 1 \end{pmatrix}$$



ruhend — bewegt entlang der x-Achse

Offensichtlich wird in Bewegungsrichtung das Feld verkleinert, $\perp$ dazu vergrößert.

Kommentar: für bewegte Ladung existiert ein Magnetfeld, kann angegeben werden

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{e}_R{}' \times \vec{E}(r,t)}{c}$$

Siehe oben

langsam bewegte Punktladg. $\beta \to 0$

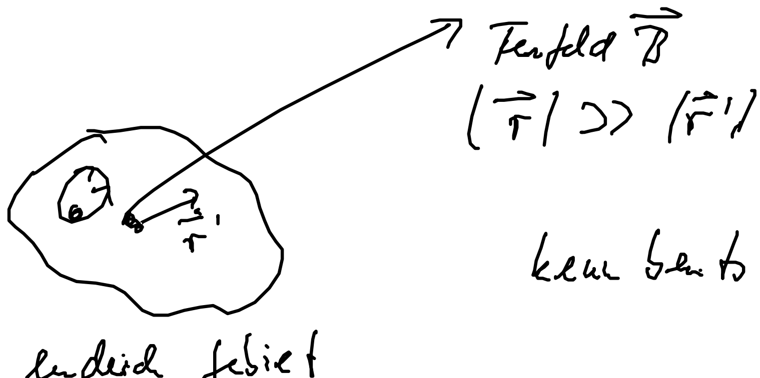
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\vec{e}_R(t') \times \vec{R}(t)}{R^3(t)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\overbrace{\left(\vec{\beta} + \frac{R(t)}{R(t')}\right)} \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{r}}_0(t) \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

$$= \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{r}}_0(t) \times \vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad (\perp \text{ E-Feld})$$

Magnetfeld einer langsam bewegten Punktladg.

5.2.2. Fernfeld einer Strominsel



kennen bereits $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \dots$

Formel f. Vektorpotential $(c \to \infty)$ in Coulombeichung

alle Punktladg. in endlich Volumen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r'\, \vec{r}\cdot\vec{r}'\, \vec{j}(\vec{r}') \; \dots$$

$\longrightarrow$ fällt mit Entfernung ab

1. Term ist Null und der 2. Term trägt als führender Term bei: $\nexists$ kein magnetisches Monopol, erster Term $\neq 0$ ist Dipolterm, hat analoge Struktur wie der elektrische Dipolterm (gleich)

1. Term $= 0$?

$$\sum_i \partial_i \left(j_i(\vec{r})\, x_k \right) \overset{\text{beachten}}{=} \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\, x_k + j_k$$

weil $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}}_{\approx 0 \text{ f. langsame Ladungen}} \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot$ auf beide Seite $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$\hookrightarrow \quad \sum_i \partial_i (j_i x_k) = j_k \qquad \Big| \int d^3r$

$$\underbrace{\int d^3r \sum_i \partial_i \left(j_i(\vec r)\, x_k\right)} = \int d^3r\, j_k(\vec r)$$

wenn das Null ist, ist $\int d^3r\, \vec j(\vec r) = 0$

und der Monopolterm ist weg

$$\sum_{i=1,2,3} \underbrace{\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3}_{\int d^3r} \underset{\partial_3}{\partial_i} \left(j_i(x_1,x_2,x_3)\, x_k\right) =$$

z.B. $i=3$ $\quad = \int dx_1 \int dx_2\, j_3(x_1,x_2,x_3)\, x_k \Big|_{-\infty = x_3}^{+\infty = x_3}$

wenn die Verteilg. lokalisiert ist

$$j_3(x_1,x_2,\pm\infty)\, x_k = 0$$

$\int d^3r\, j(\vec r) = 0$ bedeutet auch anschaulich:

Stromwege heben sich weg.

nachdem Monopol $= 0$ $\rightarrow$ berechne d. Dipolterms:

$$\int d^3r\, \vec{r}\cdot\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2}\,\vec{r}\times\int d^3r'\,\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')$$

diese Größe definiert das magnetische Dipolmoment

$$\underbrace{\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\vec{r}\times\vec{\mu}}{r^3}}_{\text{analog}}\ ,\quad \underbrace{\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')}_{\text{magnetisch Dipolmoment}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Dipolpotential d. el. Felds

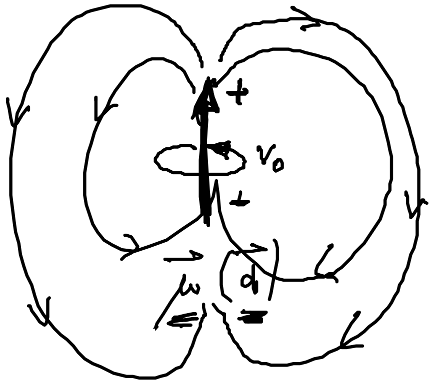
$\longrightarrow$ geht beide mit $\frac{1}{r^2}$, und Analogie $\vec{r}\times\vec{\mu}$, $\vec{r}\cdot\vec{d}$

$\vec{\mu}$, $\vec{d}$ werden nur durch die Verteilg. in der Volumen $\vec{r}'$ definiert.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi\ ,\quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{r}\,(\vec{d}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{d}}{r^5}\quad\Bigg|\quad \vec{B} = \frac{3\vec{r}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{\mu}}{r^5}$$

Die Dipolfelder haben exakt dieselbe Struktur:



Während das einfachste Modell für einen elektrischen Dipol 2 Ladungen sind, ist es f. den magnet. Dipol ein Kreisstrom:

Drehimpuls

$$\vec\mu = \frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec r\,' \times \vec j(\vec r\,') = \frac{1}{2} q \, \vec r_0 \times \vec v_0 \left(\frac{m}{m}\right) = \frac{1}{2}\frac{q}{m} \vec L_0$$

$$\vec j = q \vec v_0 \, \delta(\vec r - \vec r_0)$$

Magnetische Felder sind mit dem Drehimpuls der mikroskopisch bewegten Teilchen verbunden.