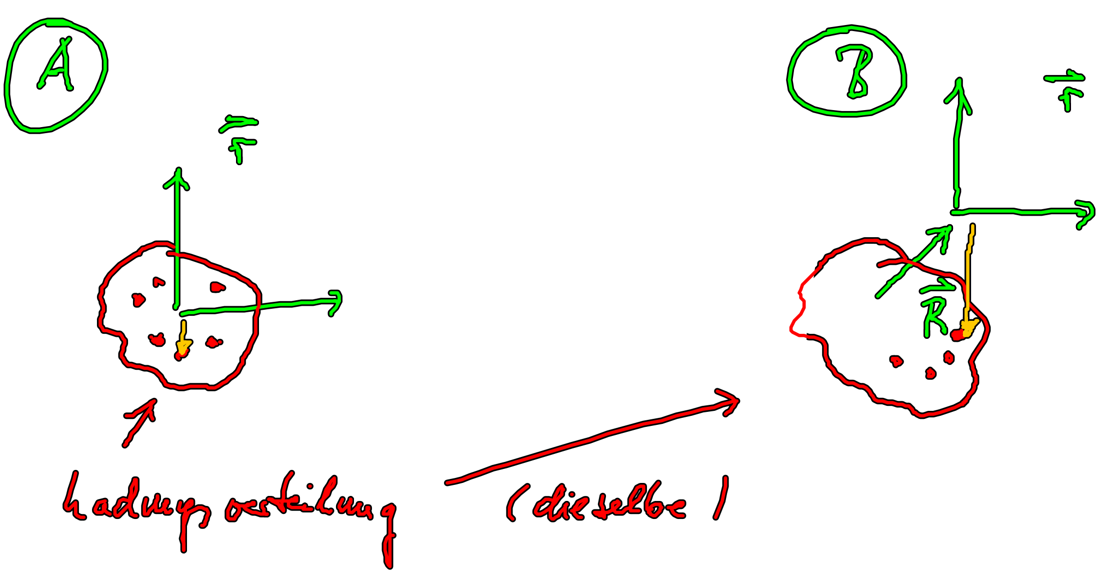
2 Nachträge:

1) Dipolmoment + Koordinatensystem

2.) $$\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,') = -\frac{1}{2}\,\vec{r} \times \int d^3r' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')$$

zu 1.) i.a. hängt das Dipolmoment vom Koordinatensystem ab:



$$\vec{d}_A = \int d^3r\, \vec{r}\, \rho_A(\vec{r}) \qquad \vec{d}_B = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho_B(\vec{r}')$$

$$\rho_A(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \qquad \rho_B(\vec{r}') = \rho(\vec{r}' - \vec{R})$$

$$\vec{d}_B = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho_B(\vec{r}') = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho(\vec{r}' - \vec{R}) = \left| \vec{r}' = \vec{r}' + \vec{R} \right|$$

$$= \int d^3r' \left(\vec{r}' + \vec{R}\right) \rho(\vec{r}') = \int d^3r'\, \vec{r}'\, \rho(\vec{r}') + \vec{R} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')$$

$$= \vec{d}_A + \vec{R}\, \underset{\uparrow \text{ Gesamtladung}}{Q}$$

$\vec{d}_A \neq \vec{d}_B$ im allgemeinen

Wenn $Q = 0$, also der Monopolterm verschwindet, sind die Dipolmomente identisch und das Dipolmoment an sich ist eine <u>gute</u> Charakterisierung der Verteilung

(gilt allgemein für den Fall, daß die jeweils „tieferen" Momente verschwinden) zu 2.) $\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \longrightarrow$ magnetisch Dipolmoment (z.z.)

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,')}_{} + \frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}\,')}_{} \quad \text{letzte VL}$$

$$= \quad \text{-"-} \quad + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \sum_i \partial_i' \left(j_i(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\right)}_{}$$

partielle Integration (Randterm $\to 0$)

$$= -\vec{r}\cdot\int d^3r' \sum_{ij} \left(\underbrace{\partial_i' x_j'}_{} \vec{e}_j\right) j_i(\vec{r}\,')\vec{r}\,'$$

$\vec{r}\,'$ (was weiß)

$$= -\vec{r}\cdot\int d^3r' \sum_i \vec{e}_i \, j_i(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'$$

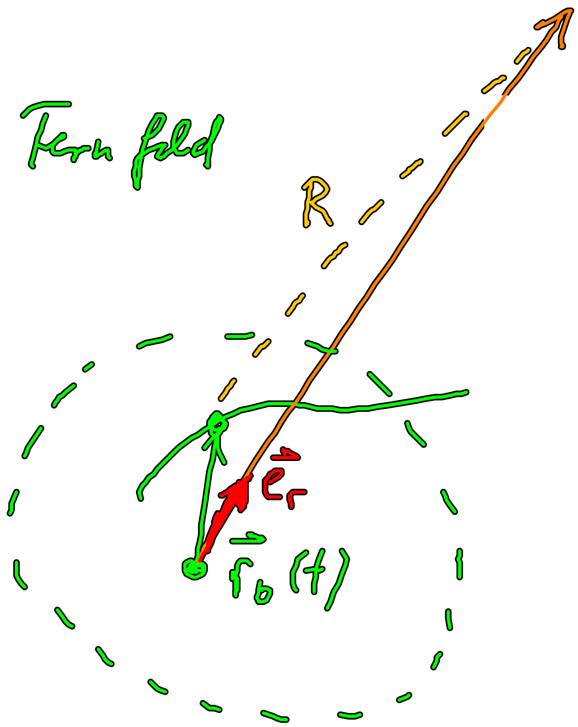
$$\underbrace{= -\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'}_{}$$

$$= \int d^3r' \, \frac{1}{2}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\vec{j}(\vec{r}\,') - \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\vec{r}\,\vec{r}\,'\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\vec{r}\times\underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{magnetisch Dipolmoment}}$$

5.3. Beschleunigt bewegte Punktladung – Fernfeld

Fernfeld



$\vec{r}$, mit $E(\vec{r}, t) = ?$

$$\vec{E} = \cancel{\vec{E}_{Nahfeld}} + \vec{E}_{Fernfeld}$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{R^2}\right)} \qquad \left(\frac{1}{R}\right)$$

$\downarrow$

f. große Entfernungen

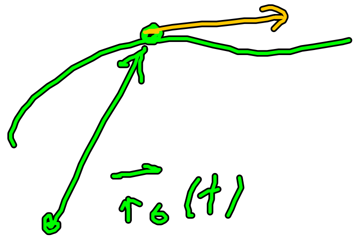
$\vec{E}_{Fernfeld} \longrightarrow$ Approximation $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$

$$\vec{R} \rightarrow \vec{r} \qquad \text{(weit weg)}$$

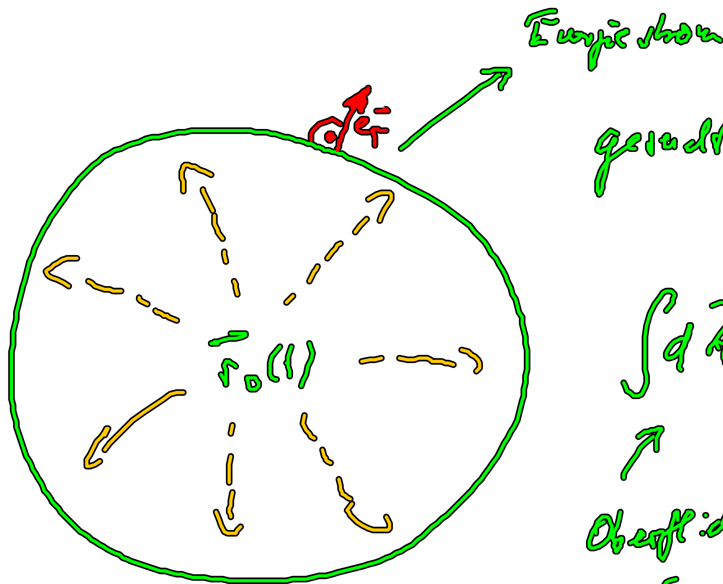
$$t' \rightarrow t - \frac{r}{c} \qquad \text{(Laufzeit} \quad \frac{|\vec{r}_0|}{c} \ll \frac{|\vec{r}|}{c}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \, \frac{\vec{e}_r \times \left\{ (\vec{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\}}{c\, r \, (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_r)^3} \qquad \vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c}$$

$\dot{\vec{r}}_0(t)$



$$\vec B(\vec r,t) = \frac{\vec e_r \times \vec E(\vec r,t)}{c}$$



gesucht ist Energiefluß d. gedachte Kugel

$$\int d\vec A \cdot \vec S \;\hat{=}\;$$ Energie pro Zeit durch Kugel

Oberflächenintegral (r)

$$\int d\vec A \cdot \vec S = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Oberfläche}} \, \vec e_r \cdot \vec S \qquad \vec S = \frac{\vec E \times \vec B}{\mu_0}$$

$\vec e_r \cdot \vec S = ?$, setze $\vec C = \vec e_r \times \left[(\vec e_r - \vec \beta) \times \dot{\vec \beta} \right]$

$$\vec S \sim \underbrace{\vec C}_{\vec E} \times \underbrace{(\vec e_r \times \vec C)}_{\sim \vec B} = \left(\vec C \cdot \vec C \, \vec e_r - \vec C \cdot \vec e_r \, \vec C \right)$$

$\vec C \perp \vec e_r$

$\vec S \cdot \vec e_r \simeq \vec C \cdot \vec C$, weil $\vec C \cdot \vec e_r = 0$

$$= \underbrace{\frac{q^2}{\mu_0 (4\pi\varepsilon_0)^2 c^3 r^2}}_{\frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c r^2}} \frac{\left|\vec e_r \times \left((\vec e_r - \vec\beta)\times \dot{\vec\beta}\right)\right|^2}{(1 - \vec e_r \cdot \vec\beta)^6} \qquad \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2\right)$$

Energie / Zeit durch Kugel:

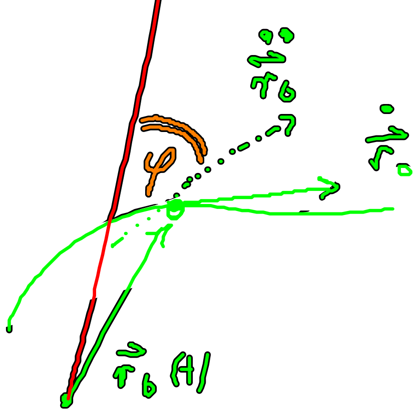
$$\int d\vec A \cdot \vec S = 4\pi r^2 \, \vec e_r \cdot \vec S = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\left|\vec e_r \times \{(\vec e_r - \vec\beta)\times \dot{\vec\beta}\}\right|^2}{(1 - \vec\beta \vec e_r)^6}$$

5.3.1 Langsam beschleunigte Ladung

$v_0 = |\dot{\vec r}_0| \ll c \Rightarrow \beta \to 0$ wo mit 1 verglichen wird

$$\int d\vec A \cdot \vec S = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \underbrace{\left| \vec e_r \times \left(\vec e_r \times \ddot{\vec r}_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\right|^2}_{\left|\left(\ddot{\vec r}_0 - \vec e_r \cdot \ddot{\vec r}_0 \, \vec e_r\right)\right|^2}$$

$\vec r$

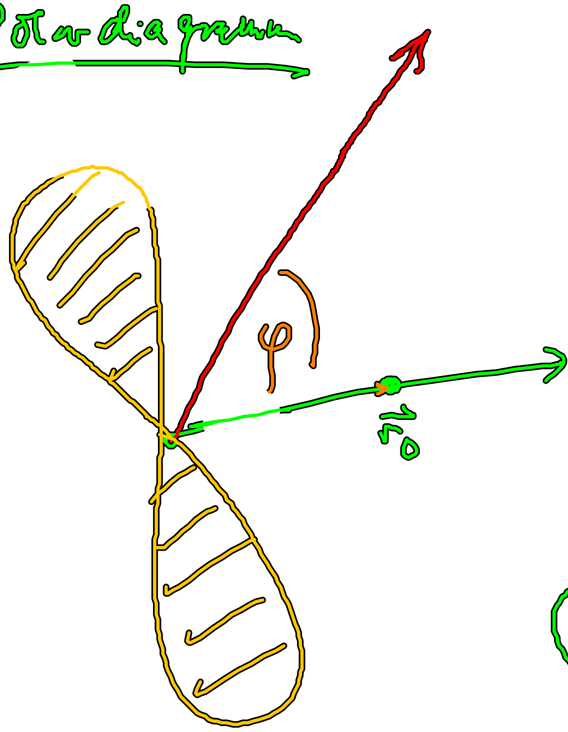


$$|\ddot{\vec r}_0|^2 - 2|\ddot{\vec r}_0|^2\cos^2\varphi + |\ddot{\vec r}_0|^2\cos^2\varphi$$

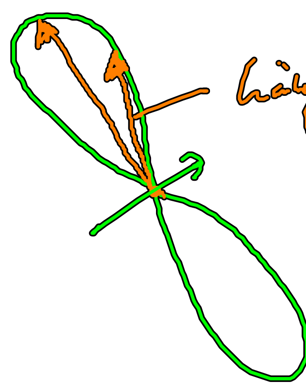
$$= |\ddot{\vec r}_0|^2\left(1-\cos^2\varphi\right)$$

$$= |\ddot{\vec r}_0|^2 \sin^2\varphi$$ $\hat{=}$ Stärke der Abstrahlung

Polardiagramm



$$\dot{\vec r}_0 \sim \ddot{\vec r}_0 \sim \vec r_0$$



Länge als Maß der abgestrahlten Energie

Die langsam bewegte, aber beschleunigte Punktladung strahlt $\perp$ zu ihrer Beschleunigungsrichtung.

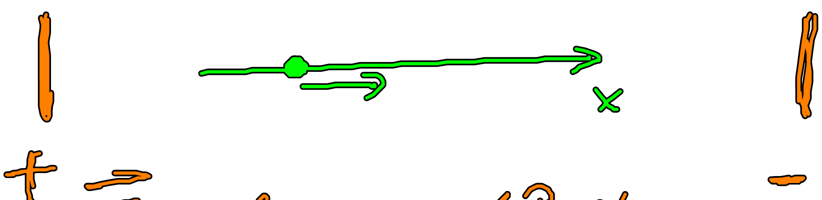
5. 3. 2. Schnell bewegte Punktladung

$\beta \rightarrow 1$ soll zugelassen werden

$$\int d\vec{A}\cdot\vec{S} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left|\vec{e}_r \times \left(\left(\vec{e}_r - \cancel{\vec{\beta}}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right|^2}{\left(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_r\right)^5}$$

wird Ernst genommen

$\vec{\beta} \sim \dot{\vec{\beta}} \sim \vec{r}_0$

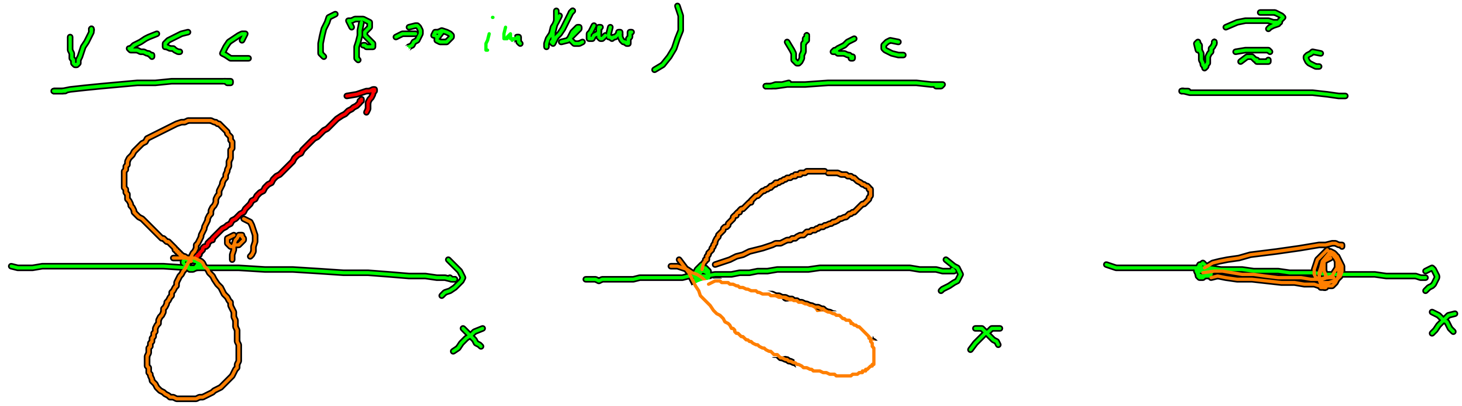


Linear-beschleuniger

$\vec{E}_0$ anlegen in 1 Richtg.
(x-Richtg.)

Winkelverteilg. wird komplizierter:

$$\frac{\sin^2\varphi\;\dot{\beta}^2}{\left(1-\beta\cos\varphi\right)^6}$$



diese Kurve bekannt in ÜA, erhält sie über eine Bedingung d. maximalen Abstrahlrichtung:

$$\partial_\varphi\left(\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^6}\right)=0 \Rightarrow \varphi_{max}$$

$$\cos^2\varphi_{max}+\frac{1}{2\beta}\cos\varphi_{max}-3=0$$

$$\cos(\varphi_{max}) = -\frac{1}{4\beta}\pm\sqrt{\frac{1}{16\beta^2}+\frac{3}{2}}$$

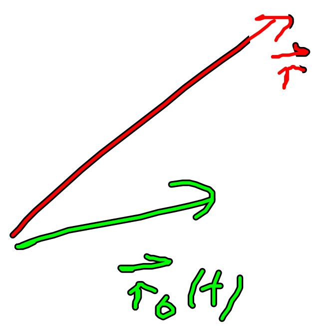
beschreibt den Übergang $\varphi_m = \frac{\pi}{2} \to \varphi_m = 0$

f. $\beta = 0 \to$ „$\beta = 1$"

$\beta = 0 \to \varphi_{max} = \frac{\pi}{2}$

$\beta \to 1 \to \varphi_{max} = 0$

5.3.3 Spektrale Eigenschaften der Emission



Detektor $E(\omega)$, gemessen über Spektrometer

$$|E(\omega)|^2 \to I(\omega)$$

spektrale Intensität

langsam bewegte Ladung + einfaches Modell: entlang x-Richtg.

$$E(t) \leftarrow \ddot{\vec r}_0(t) \qquad E(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t} E(t) \sim \ddot x_0(t)$$

Newtonsche Bewegungsgl.:

externes Feld d. Beschleunigers

$$\ddot x_0 = -\gamma \dot x_0 + \frac{q E_0}{m}\,\theta(t)$$

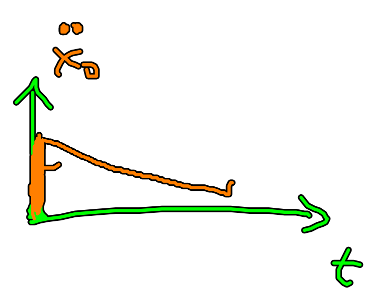
Dämpfg., z.B. in Materie

„billig-Modell"

$\to$ „Bremsstrahlung"

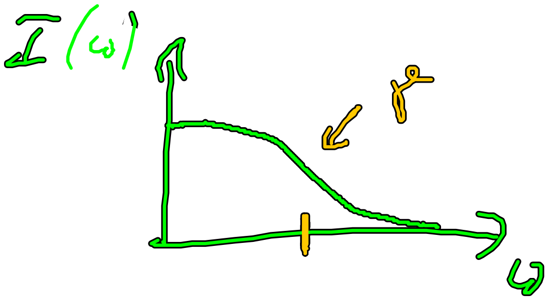
$$\dot v_0 = -\gamma v_0 + \frac{q E_0}{m}\,\theta(t)$$

$$\to \quad \ddot x_0 = \frac{q E_0}{m} e^{-\gamma t}$$



$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_0^\infty dt\, e^{i\omega t} e^{-\gamma t} = \frac{1}{i\omega - \gamma}$$

$$|\tilde{E}(\omega)|^2 \propto \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}$$



Bremsstrahlungs typisch Verhalten: kontinuierliches Spektrum mit Abschneideparameter

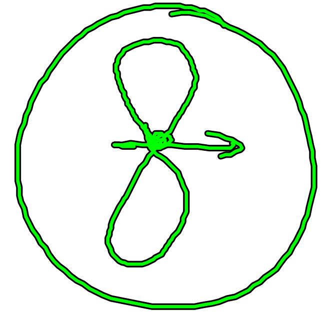
5.3.4 Strahlungsdämpfung

in der obigen Newtongleichung ist noch nicht die Dämpfg. der Bewegg. durch den Energieverlust durch Strahlungsabgabe enthalten.

$\beta \to 0$ (nichtrelativistischer Fall)

emittierte Energie auf der Kugeloberfläche:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} |\ddot{\vec{r}}_0|^2 \sin^2\varphi$$



integriere über φ, um Gesamtabstrahlg. zu bekommen,

o.B. gilt $\sin^2\varphi \to \frac{2}{3}$.

<u>Mechanik</u>: Verlustleistg. bei Nichtpotentialkraft

$$E = \int dt \; \underbrace{\vec{v}_0(t) \cdot \vec{F}_{rad}(\vec{r}_0)}_{①} = \text{Anteil der dissipativen Kräfte}$$

kinet. + pot. E.

radiation Kraft

„Kraft die die Strahlungsdämpfg. verursacht"

$$\int dt \; \underbrace{\text{Leistg}_{rad}}_{} = \int dt \; \underbrace{\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}_{②} \dot{v}_0^2(t)$$

Verluste

$$① = -②$$

$$= -\int dt \; \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \; \dot{v}_0 \frac{d}{dt} v_0$$

$$= \int dt \; \underline{-\;\text{''}\;-} \; v_0 \cdot \underline{\ddot{v}_0}$$

F_{rad}

$$\dot{V}_0 = F_{rad} + F_{extern} \quad \text{(Beschleunigung)}$$

$$\left(\dot{\vec{V}}_0 - \ddot{\vec{V}}_0 \, \tau_{rad}\right) = \vec{F}_{ext}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_0 - \tau_{rad} \, \dddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}_{ext}}$$

Die Strahlungsdämpfung ist proportional zur dritten Zeitableitung d. Ortsvektors.