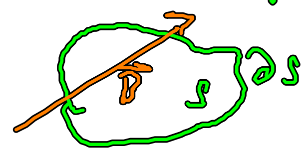
Faraday - Gesetz:

Induzierte elektromagnetische Kraft (Spannung)
ist negativ proportional der Zeitableitg. d. magnetisch
Flusses ϕ_m:



$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}(r) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)}_{\phi_m}$$

experimentell: auch $\neq 0$, wenn $S = S(t)$

Verallgemeinerg. für $S = S(t)$

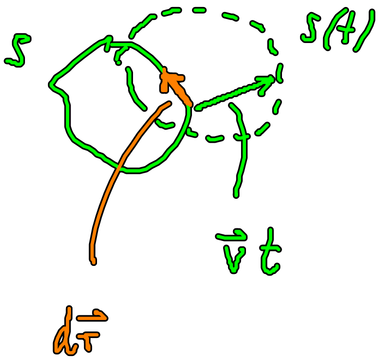
$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)} + \frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$= -\frac{d}{dt} \underbrace{\phi_m(t)}$$

enthält Anteile
der zeitlich veränderliche

Fläche $S(t)$ und $\vec{B}(\vec r, t)$

Ändrg. der Fläche in $(0,t)$



$$d\vec A \simeq \vec v t \times d\vec r$$

$$\frac{d\vec A}{dt} \simeq \vec v \times d\vec r$$

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} d\vec A \cdot \vec B = \oint \vec v \times d\vec r \cdot \vec B(\vec r)$$

Spatprodukt

$$\oint d\vec r \cdot \vec E = -\frac{d}{dt}\phi_m + \oint d\vec r \cdot (\vec B \times \vec v)$$

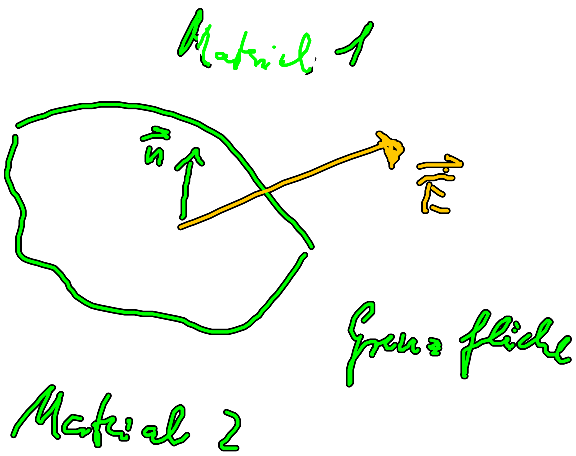
$$\oint d\vec r \cdot \underbrace{\left(\vec E + \vec v \times \vec B\right)} = -\frac{d}{dt}\phi_m$$

elektromagnetische Kraft in der bewegten Drahtschleife ∂S, diese Gesamtkraft bewirkt nun die Ladungstrennung + Spannungsabfall:

$$\boxed{\oint d\vec r \cdot \vec E' = -\frac{d}{dt}\phi_m}$$

Die Aufteilung d. $\vec{E}, \vec{B}$-Felds hängt vom Beobachter ab,
d.h. Elektron in DS spürt jetzt effektiv $\vec{E}'$.
(Ableitung bezieht sich auf $\vec{v}$ = zeitl. konstant.)

7.3.2. Stetigkeitsbedingungen („Randbedingungen", „Übergangsbedingungen")

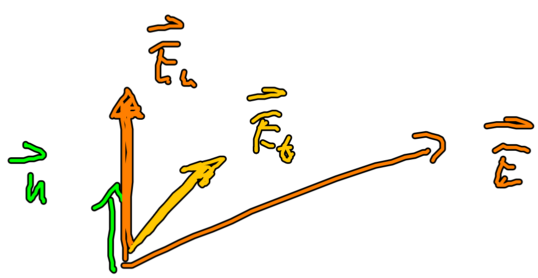


das Verhalten der Felder an der Grenzfläche wird benötigt, um getrennt gefundene Lösungen „aneinander zustückeln".

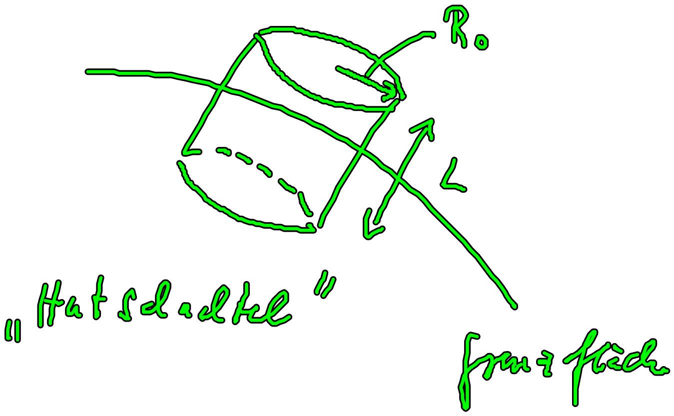
$\vec{n}$ Normalenvektor an die Fläche

2 Vektoren sind interessant:

$$\underbrace{\begin{aligned} &\text{Normalkomponente } \vec{E}_n = \vec{n}\,(\vec{E}\cdot\vec{n}) \\ &\text{Tangentialkomponente } \vec{E}_t = \vec{n}\times\vec{E} \end{aligned}}_{\text{liegt in der Ebene}}$$



Divergenzgleichungen führen auf Stetigkeitsbedingungen für $\vec{D}, \vec{B}$:



(integral Form)

Mantelfläche : ΔM

Stirnfläche : ΔA

a) $\oint d\vec{A} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \int d^3r \, \rho(\vec{r})$ über die Hutschachtel

$L \to 0$

(i) wenn $\rho(\vec{r})$ nicht ∞ wird, kann man Mittelwertsatz verwenden

(Mittelwert : $\overline{X}$)

$$\Delta M \overline{D}_t + (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \, \Delta A = \Delta A \, L \, \overline{\rho}$$

$$0 + (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \, \Delta A = 0$$

$\uparrow$

$L \to 0$

Die Normalkomponente des $\vec{D}$ Felds ist stetig wenn für ρ-Integral der Mittelwertsatz gilt $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = 0$, $D_{n_1} = D_{n_2}$.

(ii) In idealen Metallen kann der Mittelwertsatz nicht verwendet werden ideale Metalle $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$\sigma_L \to \infty$ guter Leiter $\Longrightarrow$ $\vec{E} = 0$ im Metall

führt oft zu Anhäufungen v. Ladungen in einer kleinen

Grenzschicht. F. Felder gilt der Mittelwertsatz immer.

$$\rightarrow \text{für} \quad \int d^3r\, \rho = \Delta Q$$

$$\uparrow$$

$$L \to 0$$

Oberflächenladungsdichte

$$\rightarrow \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot\vec{n}\, \Delta A = \Delta Q$$

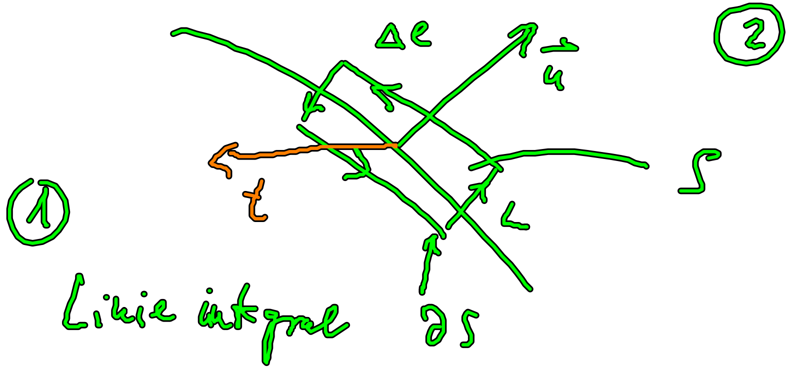
$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot\vec{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \rightarrow \sigma \;\hat{=}\; \text{endlich}$$

Die Normalkomponente der $\vec{D}$-Felds springt an einer Grenzfläche um die Oberflächenladung.

Für reale Materialmodelle ist σ i.a. $= 0$.

b) $\oint d\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow$ Die Normalkomponente der $\vec{B}$-Felds ist an einer Grenzfläche stetig $\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\cdot\vec{n} = 0$

Rotationsgleichungen



c) $\oint_{\partial S} d\vec r \cdot \vec E(\vec r) = -\int_S d\vec A \cdot \partial_t \vec B$, nach Mittelwertsatz

Umlauf::

$\perp \quad + \quad \parallel \quad = \quad 0$

zur Grenzfl. zu Grenzfläche $L \to 0$

$\parallel \qquad \parallel$

$0 \qquad \vec E_2 \cdot \Delta e(\vec t \times \vec u) - \vec E_1 \cdot \Delta e(\vec t \times \vec u) = 0$

nach Mittelwert

$$\vec t \cdot (\vec u \times (\vec E_2 - \vec E_1)) = 0$$

kann auf Grenzfläche beliebig gelegt werden $\Longrightarrow$ $\vec u \times (\vec E_2 - \vec E_1) = 0$

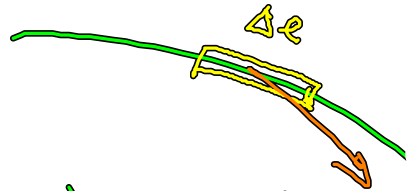
Die Tangentialkomponente (in Ebene) des E-Feldes ist stetig.

d) $\oint d\vec r \cdot \vec H = \int d\vec A \cdot (\vec j_m + \partial_t \vec D)$

$$\underbrace{(\vec H_2 - \vec H_1)\cdot(\vec t \times \vec n)\,\Delta l}_{\text{analog (c): } E\text{-Feld}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn Mittelwertsatz f. } \vec j \text{ gilt} \\ \Delta l\, \dfrac{\Delta I_m}{\Delta l}, & \text{wenn man Integral auswerten muß} \end{cases}$$

Strom durch die Fläche S

Liniestromdichte

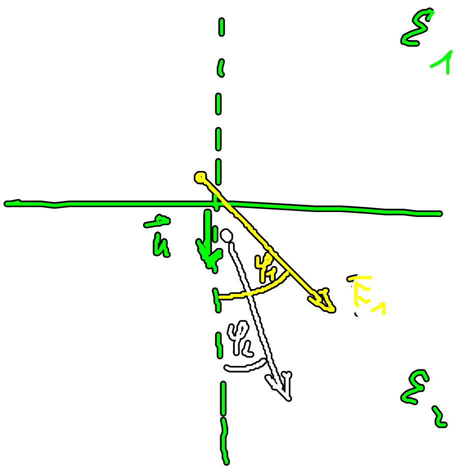


$$\vec t \cdot \left(\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1)\right) = \frac{\Delta I_m}{\Delta l} = \vec t \cdot \vec k$$

$$\longrightarrow \quad \vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1) = \vec k$$

Die Tangentialkomponente v. $\vec H$ ist stetig, bzw springt um ein Liniestromdichte $\vec k$.

7.3.3. Beispiel: Brechung v. Feldlinien im Dielektrikum



1) $\vec n \cdot (\vec D_1 - \vec D_2) = 0$

$$\vec n \cdot (\varepsilon_1 \vec E_1 - \varepsilon_2 \vec E_2) = 0$$

$$\cos\varphi_1\, \varepsilon_1 E_1 = \cos\varphi_2\, \varepsilon_2 E_2$$

2) $\vec n \times (\vec E_1 - \vec E_2) = 0$

$$\sin\varphi_1 \, E_1 = \sin\varphi_2 \, E_2$$

$$(1+2) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

klein ∡ $\quad \varphi_1 \approx \varphi_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Die Winkel die die Felder einnehmen zur Normal sind unterschiedlich, im Verhältnis $\varepsilon_1 / \varepsilon_2$.

Die Feldlinien werden beim Übergang dicht $\rightarrow$ dünn $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ zum Lot hin gebrochen $\rightarrow \varphi_2 < \varphi_1$

7.3.4 Methoden zur Behandlung v. Randbedingg.

Überblick – Vertiefg. im Tutorium und ÜA.

7.3.4.1. Orthogonale Funktionen

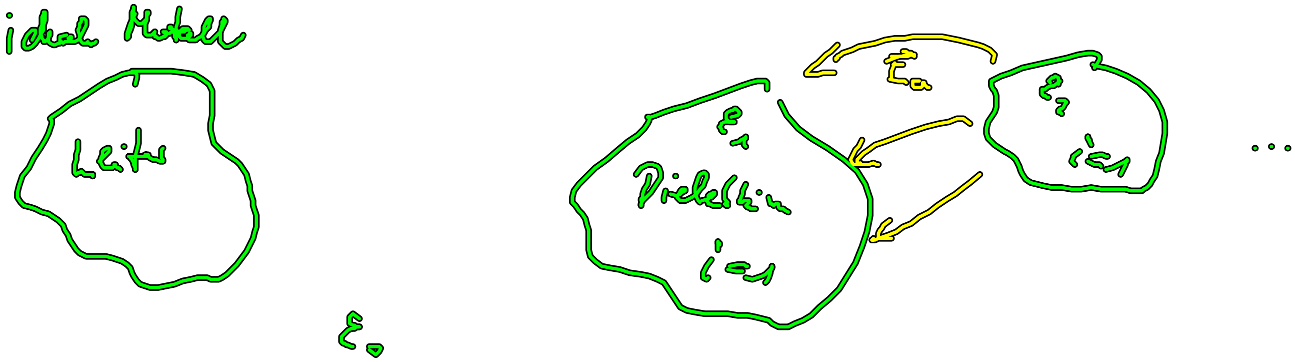
oft stückweise konstante Medien: $\varepsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$ ist in einem gewissen Raumbereich örtlich konstant

in einem Raumbereich: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ in Dielektrikum

$$\vec\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_i \vec E) = 0 \Longrightarrow \Delta\phi = 0$$

$$\vec E = -\vec\nabla\phi$$

„i"-te Raumbereich



In jedem Bereich gilt $\Delta\phi_i = 0$, muß aber ein Feld zu finden mit den Randbedingungen angepaßt werden

Dielektrikum: $\boxed{\vec n \times (\vec E_i - \vec E_a) = 0 \quad \text{usw.} \quad \vec K, \sigma = 0}$

$\Downarrow$

Man löst $\Delta\phi = 0$ indem man ϕ nach ein Satz orthogonaler Funktionen entwickelt und dann die Koeffizienten über RB anpaßt

ideales Metall:

weil $\sigma_L \to \infty$

$\to E_L$ (im Leiter) $= 0$

$$\vec n \times (\vec E_a - \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec E_L}}) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec n \times \vec E_a &= 0 \\ \vec n \cdot \vec D_a &= \sigma \end{aligned}} \Longrightarrow$$

$$\phi = \sum_n a_n f_n(\vec{r})$$

$\Delta f_n(r) = 0$ lösl Laplacegleichg.

a_n sind die zu bestimmend Koeffizient die in jedem Medium verschieden sein können $(a_n^1, a_n^2 \dots)$

Bsp. für die f_n ist die Lösg. von ϕ nach Kugelkoordinaten:

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

a_{lm}, b_{lm} sind durch RB zu bestimmen.

Bsp. ist eine dielektrische Kugel im homogenen elektr. Feld:

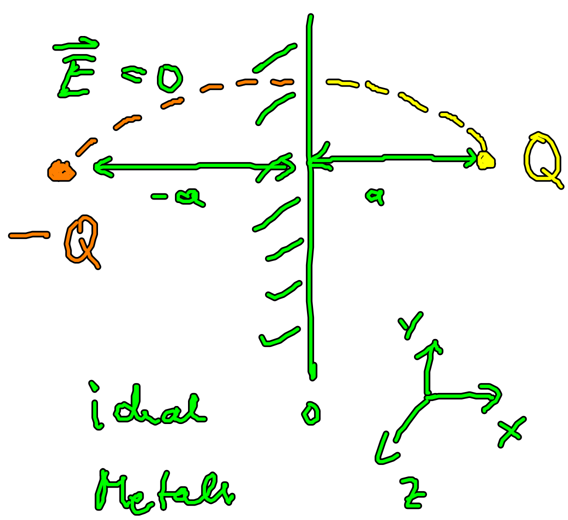
wie wird das Feld durch die Kugel gestört? ÜA Blatt 8

7.3.4.2 Methode der Spiegelladung

oft kann man „fiktive" Ladungen ins Problem einführen,
um die Randbedingungen zu erfüllen:

„Methode der fiktiven (Spiegel-) Ladungen".

Bsp Punktladung vor idealem Metall



$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \phi_{hom}$$

inhomogene Lsg. der Poissongl.

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1 Punktladung.

homogene Lösg.
– soll RB erfüllen
und $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
nicht stören

Die fiktive Ladung stört nicht die Poissongl. im rechten Halbraum
dort gibt es nur die Q-Ladung die zu ρ beiträgt.

Aber die fiktive Ladung sorgt für $\phi = 0$ auf dem Rand:

$\phi = \phi_{inh} + \phi_{hom}$ auf der rechten Seite:

$$\phi^{\text{rcdb}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right)$$

$\phi(x=0) = 0 \quad \forall$ y, z in der Ebene

Dann ist RB erfüllt die Randbedingung, g.d. daß

in y, z Ebene keine verschiebene Kraft wirkt.

$$G = \oint d\vec{S}\cdot\vec{E} \neq 0.$$