Do-Tutorium → Fr nach der VL im EW 731

weiter zu <u>9.1 Suszeptibilität</u>.

kurze WH: – Ausbreitung ebener Wellen im Medium

– Startpunkt: Wellengl. für $\vec{E}$

– Einführung einer komplexen Brechzahl

$$n = \sqrt{1 + \chi}$$

– Lambert-Beer-Gesetz

$$|E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 \, e^{-\underbrace{2 \frac{\omega}{c} \mathrm{Im}(n)}_{\kappa} z}$$

exponentielles Abklingen der Intensität (Absorption), falls $\mathrm{Im}(n) \neq 0$

– Suszeptibilität $\chi(\omega)$ in Dielektrika

Oszillatormodell → $\chi = \frac{q^2 n_0}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$

B) <u>Metalle</u>

Vorgehen analog zum Dielektrikum.

Bei Metallen gibt es keine Rückstellkraft, d.h. $\omega_0 = 0$.

$$j_\omega = \sigma_L E_\omega$$

$j = \dot{P}$ $\quad j_\omega = -i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega) E_\omega$

$j_\omega = -i\omega P_\omega$ $\quad \Rightarrow \sigma_L(\omega) = -i\omega \chi(\omega)$

d.h. $\sigma_L \sim \chi$

$P_\omega = \varepsilon_0 \chi(\omega) E_\omega$

elektrische Leitfähigkeit

Findet Absorption in Metallen statt?

$$\chi(\omega)\Big|_{\substack{\omega_0=0\\ \gamma=0}} = -\frac{q^2 n_0}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega^2} = -\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$$

mit der Plasmafrequenz $\omega_{pl}^2 = \frac{q^2 n_0}{m\varepsilon_0}$

$$n = \sqrt{1+\chi_r} = \left(1-\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2-\omega_{pl}^2}$$

Für $\omega > \omega_{pl}$ sind Metalle transparent (keine Absorption).

Für $\omega < \omega_{pl}$ ist n imaginär. → Absorption

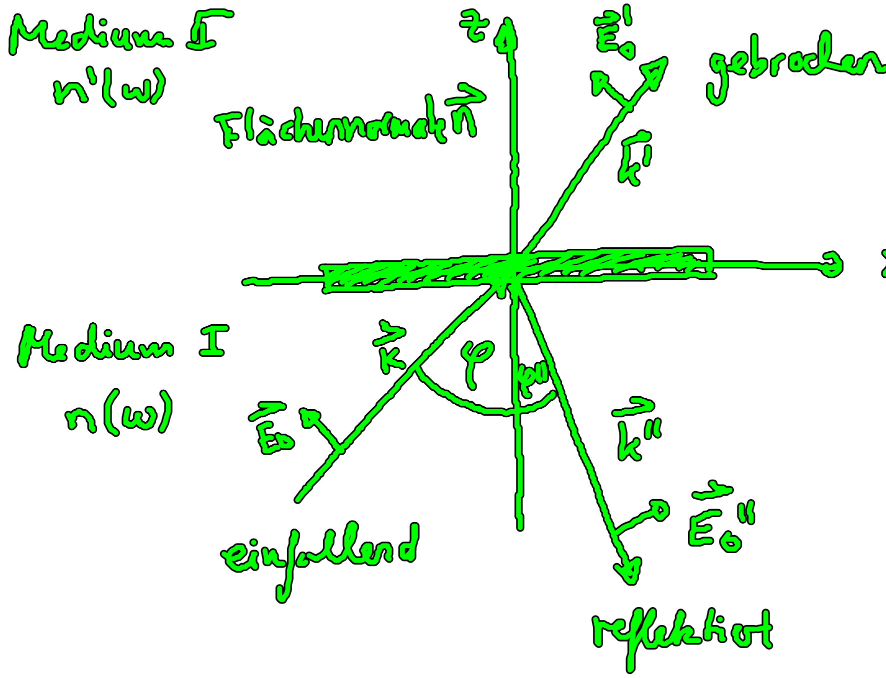
Energie wird in kollektive Plasmaoszillationen des Elektronengases (Plasmonen) umgewandelt.

9.2 Feldausbreitung durch eine Grenzfläche

Reflexion und Brechung ebener Wellen an ebenen Grenzflächen

ges.: Winkelbeziehungen → Brechungs- und Reflexionsgesetz

Intensitätsbeziehungen → Fresnelschen Gleichung



Grenzfläche zwischen zwei Medien in xy-Ebene

Ansatz:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B} = \frac{1}{c_n}\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t)} \qquad \vec{B}'' = \frac{1}{c_n}\frac{\vec{k}''}{k}\times\vec{E}''$$

$$\vec{E}' = \vec{E}_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)} \qquad \vec{B}' = \frac{1}{c_{n'}}\frac{\vec{k}'}{k}\times\vec{E}'$$

Da die RB an jedem r und t gelten, dürfen sich die Phasen der 3 Wellen auf $z=0$ höchstens um ein ganzzahlig Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\Big|_{z=0} = \left(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t\right)\Big|_{z=0}^{+n\pi 2} = \left(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t\right)\Big|_{z=0}^{+m\pi 2}$$

- Dies soll insbes. für $r=0$, $t=0$ gelten $\Rightarrow n=m=0$
- Für $r=0$, $t\neq 0$ $\Rightarrow$ $\omega = \omega'' = \omega'$, d.h. bei Reflexion und Brechung findet keine Frequenzänderung statt.
- Für $r\neq 0$, $t=0$ $\Rightarrow$ $(\vec{k}\cdot\vec{r})_{z=0} = (\vec{k}''\cdot\vec{r})_{z=0} = (\vec{k}'\cdot\vec{r})_{z=0}$

$$k_x x + k_y y = \ldots$$

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass $k_y = 0$

$\Rightarrow k_y'' = k_y' = 0$, d.h. alle Vektoren liegen in einer Ebene, die durch $\vec{k}$ und $\vec{n}$ festgelegt ist.

$$k_x = k_x'' = k_x'$$

$$\Leftrightarrow \quad k\sin\varphi = k''\sin\varphi'' = k'\sin\varphi'$$

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} n \rightarrow k = k''$ da im gleichen Medium

$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi''}$ Reflexionsgesetz

Einfallswinkel $\hat{=}$ Reflexionswinkel

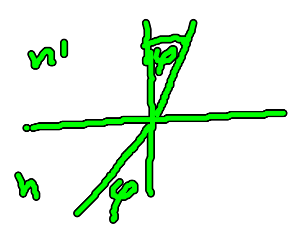
$$k\sin\varphi = k'\sin\varphi'$$

$$\frac{\cancel{\omega}}{c_0} n\sin\varphi = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{c_0}} n'\sin\varphi' \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{n}{n'}}$$

Snelliussche Brechungsgesetz

Falls Medium II optisch dichter, d.h. $n' > n$, folgt $\varphi' < \varphi$

$\rightarrow$ Welle zum Lot hin gebrochen



Ist Medium II optisch dünner $\rightarrow$ Brechung vom Lot weg. Es existiert damit ein Grenzwinkel $\varphi_t = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin\varphi' = \frac{n'}{n}$$, Totalreflexion

Gebrochene Welle ist dann eine reine Oberflächenwelle (evaneszente Welle) auf der Grenzfläche. $\rightarrow$ Übungsaufgabe

Ableitung der Fresnelschen Formeln
(Intensitätsverhältnisse bei Reflexion und Brechung)

ges.: $\frac{E_0'}{E_0}$ bzw. $\frac{E_0''}{E_0}$

Jede bel. polarisierte Welle lässt sich in 2 senkrecht zueinander polarisierte Wellen zerlegen. Daher betrachte 2 Spezialfälle:

A) $\vec{E}$ $\perp$ Einfallsebene polarisiert, d.h. $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y$

B) $\vec{E}$ $\parallel$ ——— $\parallel$ ———, d.h. $\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_y = 0$

A) Auswertung der Grenzbedingungen

i) $\vec{E}_t$ ist kontinuierlich bei $z=0$

$$\vec{E}_t = \vec{E} \times \vec{n} \rightarrow \underline{\left| (\vec{E} + \vec{E}'') \times \vec{n} = \vec{E}' \times \vec{n} \right|}$$

Da im Fall A alle $\vec{E} \perp \vec{n}$, ist die Bedingung dann erfüllt, wenn $E_0 + E_0'' = E_0'$

ii) $\vec{H}_t$ ist kontinuierlich bei $z=0$

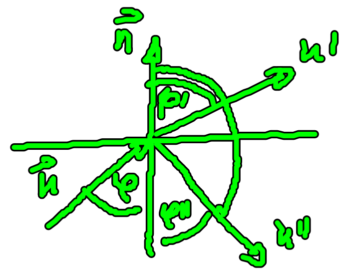
$$\vec{H}_t = \vec{H} \times \vec{n} \rightarrow \underline{\left| (\vec{H} + \vec{H}'') \times \vec{n} = \vec{H}' \times \vec{n} \right|}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\leadsto \frac{1}{\mu_r}\left(\vec{k}\times\vec{E} + \vec{k}''\times\vec{E}''\right)\times\vec{n} = \frac{1}{\mu_r'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}'\right)\times\vec{n}$$

$$\vec{n}\times(\vec{k}\times\vec{E}) \overset{\text{bac-cab}}{=} \underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{E})}_{0 \text{ im Fall A)}}\vec{k} - (\vec{n}\cdot\vec{k})\,\vec{E}$$

$$\frac{1}{\mu_r}\Big[\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{k})}_{k\cos\varphi}\vec{E} + \underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{k}'')}_{\substack{k''\cos(\pi-\varphi'') \\ -k''\cos(\varphi'')}}\vec{E}''\Big] = \frac{1}{\mu_r}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{k}')}_{k'\cos\varphi'}\vec{E}'$$



$$k = \frac{\omega}{c_n} = \frac{\omega}{c_0}\,n$$

$$\frac{n}{\mu_r}\Big[E_0\cos\varphi - \underbrace{E_0''}_{\substack{E_0'-E_0 \\ \text{(folgt aus i))}}}\cos\underbrace{\varphi''}_{\varphi}\Big] = \frac{n'}{\mu_r'}E_0'\cos\varphi'$$

$\varphi'' = \varphi$ Reflexionsgesetz

$\ast\ \dfrac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \dfrac{n}{n'}$ Brechungsgesetz

$$\frac{2n}{\mu_r}E_0\cos\varphi = \frac{1}{\mu_r'}E_0'\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi} + \frac{n}{\mu_r}E_0'\cos\varphi$$

$$\cos\varphi' = \sqrt{1-\sin^2\varphi'} \overset{\ast}{=} \sqrt{1-\left(\frac{n}{n'}\sin\varphi\right)^2} = \frac{1}{n'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}$$

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos\varphi}{\frac{\mu_r}{\mu_r'}\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\varphi} + n\cos\varphi}}$$

Amplitudenverhältnis bei der Brechung

Analog: Amplitudenverhältnis bei der Reflexion

Fresnel Formeln für $\vec{E}$ senkrecht polarisiert zur Einfallsebene
analog für $\vec{E} \parallel \vec{n}$

$$\boxed{\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos\varphi - \frac{\mu_r}{\mu_r'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}{n\cos\varphi + \frac{\mu_r}{\mu_r'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}}$$

Damit sind die reflektierte und gebrochene Feldamplitude als Fkt. des Einfallswinkels φ, der Brechungsindizes n, n' und der magnetischen Suszeptibilitäten μ_r, μ_r' der beiden Medien festgelegt.

Grenzfall: senkrechte Einfall, d.h. $\varphi = 0$ und $\mu = \mu_r'$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n'+n} \quad \text{und} \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n-n'}{n+n'}$$

Das gilt unabhängig von der Polarisationsrichtung.
Damit kann n' aus Messung von eingestrahltem und reflektierten Feld bestimmt werden.
Wenn $n' > n$ erleidet E_0'' einen Phasensprung, da Vorzeichenwechsel.

B) $\vec{E}$ parallel zur Einfallsebene polarisiert

Stetigkeitsbed. i) $\vec{D}_n$ ist kontinuierlich
ii) $\vec{B}_n$ — " —

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn'\cos\varphi}{n'^2 \frac{\mu_r}{\mu_r'}\cos\varphi + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n'^2 \frac{\mu_r}{\mu_r'}\cos\varphi - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}{\frac{\mu_r}{\mu_r'} n'^2 \cos\varphi + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi}}$$

Es gibt einen ausgezeichneten Winkel $\varphi = \varphi_B$ (Brewster-Winkel), bei dem $\frac{E_0''}{E_0} = 0$, d.h. es gibt keine reflektierte Welle in der Einfallsebene. Die Reflexion findet dann nur senkrecht zur Einfallsebene statt.

$\vec{E}$ bel. Polarisation, $\varphi = \varphi_B \Rightarrow \vec{E_0} = E_0 \vec{e_y}$, d.h. linear polarisiertes Licht

$$n'^2\cos\varphi_B = n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\varphi_B}$$

für $\mu_r = \mu_r'$

$| (\ )^2, \frac{1}{n^4}$

$$\alpha^4(1 - \sin^2\varphi_B) = \alpha^2 - \sin^2\varphi_B$$

$$\sin^2\varphi_B \underbrace{(1-\alpha^4)}_{\cancel{(1-\alpha^2)}(1+\alpha^2)} = \alpha^2\cancel{(1-\alpha^2)}$$

$\alpha = \frac{n'}{n}$

$$\varphi_B = \arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \arctan\alpha$$

z.B. Glas-Luft-Übergang $\varphi_B = 56^\circ$