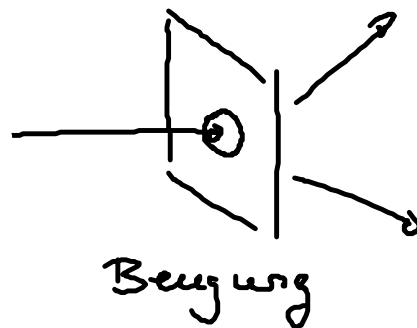
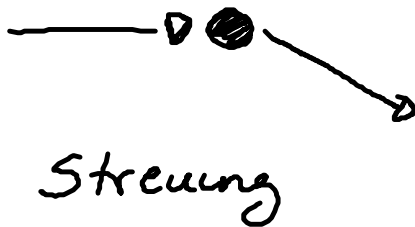


10. Streuung und Beugung elektromagnetischer Wellen

Streuung - WW eines em Welle mit einem kleinen Objekt
Gestrente Welle enthält Info über das Objekt

Beugung - WW eines em Welle mit einem makroskopischen Objekt (Hindernisse, Öffnungen)

Abweichung von geometrischer Optik: Wellenintensität dringt in den geometrischen Schattenraum ein.



Streuung und Beugung eng miteinander verbunden, insbesondere wenn die Wellenlänge des Licht λ \sim Abmessung des Objekts d .

Für theoretische Beschreibung ist

$\frac{\lambda}{d}$ entscheidend.

Exakte Lösungen sind sehr schwierig.

10.1 Rayleigh Streuung

Elastische Streuung von Wellen an Teilchen, deren Durchmesser klein im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts λ ist, d.h.

$$\frac{\lambda}{d} \gg 1$$

Diese Bedingung ist bei Streuung von Licht an Partikeln in der Luft erfüllt \rightarrow Erklärung für die blaue Farbe des Himmels.

Startpunkt: Maxwell-Gl. bei Abwesenheit von Quellen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \partial_t \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \end{aligned}$$

Wellenl. für \vec{D} :

$$\square \vec{D} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{D}$$

$$i) \quad \epsilon_0 \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\epsilon_0 \partial_t \nabla \times \vec{B}$$

$$ii) \quad \nabla \times \nabla \times \vec{D} = -\Delta \vec{D} \quad [\Delta \vec{D} = \nabla \nabla \cdot \vec{D} - \nabla \times \nabla \times \vec{D}]$$

$$iii) \quad -\Delta \vec{D} + \epsilon_0 \partial_t \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E})$$

(ii-i)

$$iv) \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{D} = \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \times \vec{H}$$

$$-III - IV \quad + \Delta \vec{D} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{D} = -\nabla \times \nabla \times (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}) + \epsilon_0 \partial_t \nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H})$$

$$\square \vec{D} = -\nabla \times \nabla \times (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}) + \epsilon_0 \partial_t \nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H}) \\ = -\vec{j}(\vec{r}, t) \text{ Quelle}$$

↑
Korrekturen des Materials zur freien Ausbreitung im Vakuum

Störungstheoretisches Vorgehen: Änderung der freien Bewegung durch das Medium (kein):

$$\vec{D} \neq \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} \neq \mu_0 \vec{H}$$

zur Erinnerung

$$\text{d.h. } \epsilon_r \neq 1 \text{ bzw. } \mu_r \neq 1$$

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

Die Wellengleichung hat die retarded Lösung

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + D^0(\vec{r}, t)$$

inhomogen homogen

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\omega} \int d^3 r' \frac{\vec{j}_{\omega}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})} + \sum_{\omega} D_{\omega}^0 e^{-i\omega t}$$

$$\text{mit } \vec{D}_{\omega} = \vec{D}_{\omega}^0 + \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}_{\omega}(\vec{r}')$$

wobei
$$\vec{f}_\omega(\vec{r}') = \vec{\nabla}' \times \vec{\nabla}' \times (\vec{D}_\omega - \epsilon_0 \vec{E}_\omega) + i\omega\epsilon_0 \vec{\nabla}' \times (\vec{B}_\omega - \mu_0 \vec{H}_\omega)$$

Lösung im Fernfeld, d.h. $r' \ll r$

Ansatz: Kugelwelle mit Streuamplitude \vec{A}_{st}

$$\vec{D}_\omega = \vec{D}_\omega^0(r) + \frac{e^{ihr}}{r} \vec{A}_{st}(r) \quad \leftarrow \text{Taylor-Entwickl.}$$

mit
$$\vec{A}_{st} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \vec{f}_\omega(\vec{r}') \quad (\text{siehe Kapitel 8.3})$$

Vereinfachung des Integrals durch partielle Integration

$$e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \underbrace{\vec{\nabla}' \times \vec{g}(\vec{r}')}_{\vec{f}_\omega} = ik\vec{e}_r \times \vec{g}(\vec{r}') e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \quad \leftarrow \text{zweifache partielle Integr.}$$

$$\vec{f}_\omega(\vec{r}') = -k^2 \vec{e}_r \times [\vec{e}_r \times (\vec{D}_\omega - \epsilon_0 \vec{E}_\omega)] - \epsilon_0 \omega k \vec{e}_r \times (\vec{B}_\omega - \mu_0 \vec{H}_\omega)$$

Für die explizite Berechnung der Streuamplitude \vec{A}_{st} müssen die Felder bekannt sein. Diese sind i.A. unbekannt.

Näherungsweise Lösung durch Iteration.

Einfluss der Streuobjekte als Korrektur zu ϵ_0 bzw. μ_0 .

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 (1 + \delta\epsilon(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 (1 + \delta\mu(\vec{r})) \vec{H}(\vec{r})$$

dabei sollen
 $\delta\epsilon(r)$ und $\delta\mu(r)$
klein bzgl. ϵ_0
und μ_0

1. Bornsche Näherung

$$(\vec{D}_\omega - \epsilon_0 \vec{E}_\omega) \approx \epsilon_0 \delta\epsilon(\vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) \approx \delta\epsilon(\vec{r}) \underline{\underline{D_\omega^0(\vec{r})}}$$

$$(\vec{B}_\omega - \mu_0 \vec{H}_\omega) \approx \mu_0 \delta\mu(\vec{r}) \vec{H}_\omega(\vec{r}) \approx \delta\mu(\vec{r}) \underline{\underline{B_\omega^0(\vec{r})}}$$

d.h. in niedrigster Ordnung werden die Felder durch die freie (ungestörte) Lösung approximiert.

Diese ist bekannt und damit kann die Wellenfg. gelöst werden. Die neue (verbesserte) Lösung kann wieder in die 1. Ordnung eingesetzt werden, etc.

Die neue (verbesserte) Lösung kann wieder in die 1. Ordnung eingesetzt werden, etc.

\Rightarrow Iteratives Verfahren führt zur Bornschen Reihe

Die ungestörten Felder sind bekannt:

$$\vec{D}_\omega^0 = \vec{E}_0 D_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}, \quad \vec{B}_\omega^0 = \frac{1}{\omega \epsilon_0} \vec{k}_0 \times \vec{D}_\omega^0(\vec{r})$$

ebene Wellen, die sich in Richtung \vec{k}_0 ausbreiten

Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

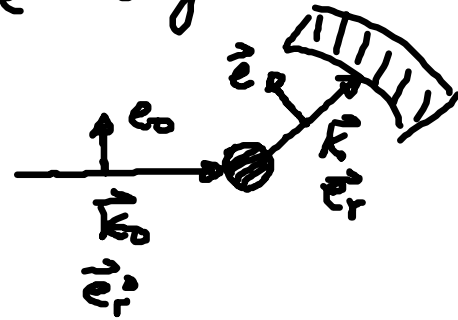
$$S = \frac{|\vec{e} \cdot \vec{E}_{st}|^2}{|\vec{e}_0 \cdot \vec{E}_0|^2} r^2$$

abgestrahlte Leistung

 einstrahlte Leistung

$$S = \frac{|\vec{e} \cdot \vec{D}_{st}|^2}{|\vec{e}_0 \cdot \vec{D}_0|^2} r^2$$

entspricht durch ein
 Raumelement in Richtung
 von \vec{e}_r mit der Polarisierung
 \vec{e} abgestrahlte Leistung
 bezogen auf die ⁱⁿ Richtung
 \vec{e}_r mit der Polarisierung
 \vec{e}_0 einstrahlte Welle



Berechnung für $\delta\epsilon \neq 0$
 $\delta\mu = 0$

(kein magnetisches Medium)

Einsetzen von $\vec{f}_\omega(\vec{r}')$ in \vec{A}_{st}

$$\vec{A}_{st} = \frac{k^2}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \vec{e}_r \times \left[\delta\epsilon(\vec{r}') \vec{D}_\omega(\vec{r}') \times \vec{e}_r \right]$$

$\swarrow D_{st} \sim \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} A_{st}$
 $\vec{e}_0 D_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$

$$S = \frac{|\vec{e} \cdot \vec{D}_{st}|^2}{|\vec{e}_0 \cdot \vec{D}_0|^2} \quad (r^2)$$

$$\vec{e}_r \times (\vec{e}_0 \times \vec{e}_r) = \vec{e}_0 (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r) - \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_0)$$

\parallel

$$= \frac{|\vec{e} \cdot \vec{A}_{st}|^2}{|D_0|^2} = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \int d^3r' e^{(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}'} \vec{e} \cdot \vec{e}_0 \delta\epsilon(\vec{r}') \right|^2$$

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = 1$$

da $\vec{e} \cdot \vec{e}_r = 0$
transversale
Wellen

Wenn $\delta \epsilon(r')$ bekannt, dann Lsg. möglich.

Anwendung der Rayleigh-Streuung in der Atmosphäre.

$$P_\omega = \sum_j \delta(r-r_j) d_j(\omega)$$

← Bewegungsgl. für $d_j(\omega)$ aufstellen

$$= \sum_j \delta(r-r_j) \epsilon_0 \alpha_j(\omega) \vec{E}_\omega(r_j)$$

Polarisierbarkeit

$$\alpha_j \approx \alpha_0 \quad \sum_j \delta(r-r_j) \alpha_0 \Rightarrow \delta \epsilon(r) = \chi(r) = \frac{P_\omega}{\epsilon_0 E_\omega}$$

$$S = \frac{k^4}{16\pi^2} \underbrace{|\vec{e}_0 \cdot \vec{e}|^2}_{\cos^2 \chi(\vec{e}_0, \vec{e})} \alpha_0^2 \underbrace{\left| \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} \right|^2}_{\text{Strukturfaktor}}$$

$\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$

$$F(\vec{q}) = \sum_i \sum_j e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

$$S \sim k^4 = \frac{\omega^4}{c^4}$$

für eine zufällige Anordnung
von Streupartikeln überlebt
nur die Term mit $r_i = r_j$
d.h. $F(\vec{q}) = N_0$

⇒ blaues Licht wird
viel stärker gestreut
als rotes Licht, da

Zahl der
Moleküle

$$\omega_{\text{blau}} > \omega_{\text{rot}}$$

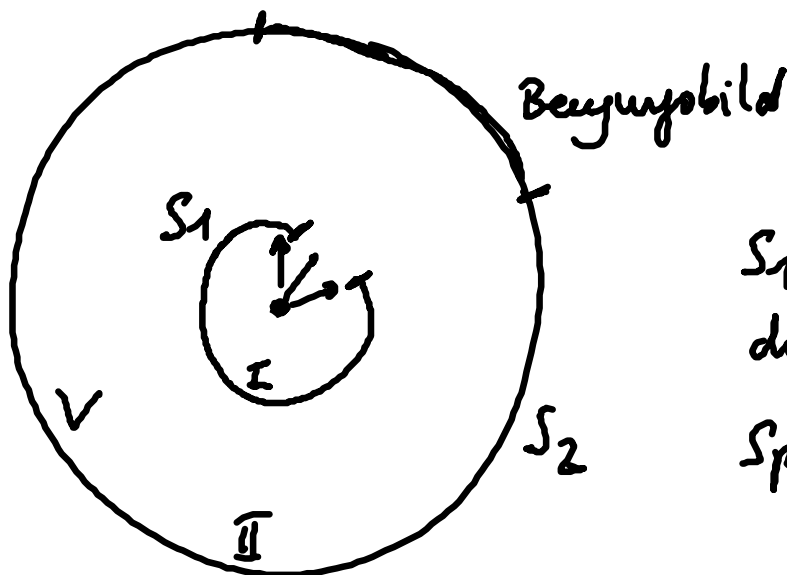
Himmelsblau: Im Licht, das nicht direkt von der Sonne kommt, sondern vorher gestreut wurde, ist blau stärker vertreten

Aberdrot: In der Transmission wird blau stärker absorbiert \rightarrow rot dominiert.

10.2. Skalare Beugungstheorie

GW von einer Welle mit Hindernissen und Öffnungen, deren Ausdehnung groß gegenüber der Wellenlänge des Lichts ist, d.h. $d \gg \lambda$

Vektoreigenschaften (Polarisationseffekte) werden vernachlässigt. Theorie für ein skalares Feld $\phi(r,t)$ (stetig verbreitend für die Komponenten von \vec{E} , \vec{B}).



typische Situation bei Beugungserscheinungen

S_1 ist unerschlossbar bis auf die Öffnung

Später $S_2 \rightarrow \infty$ (Fernfeld)
Fraunhofer Beugung

Innerhalb von V genügt φ der skalaren

Helmholtz-Wellengl. $(\Delta + k^2) \varphi(\vec{r}) = 0$

Die dieser Wellengl. entsprechende Greens-Fkt.

ist def. durch $(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

ges.: $\varphi(\vec{r})|_{S_2}$

↑
wird als bekannt angenommen
 $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Ausgangspkt. der Kirchhoffschen Theorie der Beugung

ist der Greens-Satz:

$$\int_V d^3r (\phi \Delta \phi' - \phi' \Delta \phi) = \int_{\partial V} (\phi \nabla \phi' - \phi' \nabla \phi) \cdot \vec{dA}$$

ϕ, ϕ' bel. skalare Felder

↑
folgt aus dem Gaußsatz

Sei $\phi' = \varphi$ die gesuchte Feldkomponente,

$$\phi = G.$$

$$\int_V d^3r' \left[G(r, r') \underbrace{\Delta \varphi(r')}_{-k^2 \varphi(r')} - \varphi(r') \underbrace{\Delta' G(r, r')}_{-\delta(\vec{r}-\vec{r}') - k^2 G(r, r')} \right] = \varphi(\vec{r})$$

Wellengleichung
Wellenpl. für G

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \oint_{S_1} \oint_{S_2} d\vec{A}' \left[G(\vec{r}, \vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \varphi(\vec{r}') - \varphi(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') G(\vec{r}, \vec{r}') \right]$$

\vec{n} ist der Normalenvektor des Oberflächenelementes

$d\vec{A}' = \vec{n}' \cdot dA$ zeigt immer nach außen

Kirchhoffsches Beugungsintegral



G einsetzen:

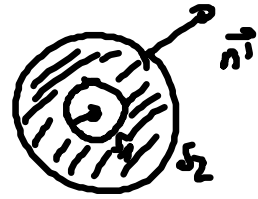
$$\varphi(\vec{r}) = \ominus \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} dA' \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}' \left[\nabla' \varphi(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\vec{R}}{R} \varphi(\vec{r}') \right]$$

$$\begin{aligned}
 R &= |\vec{r} - \vec{r}'| \\
 G &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \vec{n}' \left[-ik \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\vec{R}}{R} + e^{ikR} \underbrace{\nabla' \frac{1}{R}}_{\frac{\vec{R}}{R^3}} \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}' \left(ik \frac{\vec{R}}{R} \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \right) \frac{\vec{R}}{R^3}
 \end{aligned}$$

Approximation: $S_2 \rightarrow \infty$
 so daß $\varphi(\vec{r})|_{S_2} = 0$

\Rightarrow d.h. es wird
 nur noch über S_1
 integriert

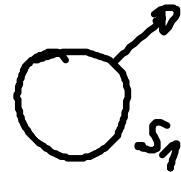
vorher



\vec{n}' zeigt nach

nochher

außen (\rightarrow ein Vorzeichen)



$\varphi(r)$ im Volumen V läßt sich
 bestimmen, falls φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n_1}$ auf S_1 bekannt
 sind.

$n' \cdot \nabla' \varphi(r')$

Kirchhoffsche Annahmen:

i) $\varphi(r)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$ verschwinden überall auf S_1
 bis auf die Öffnungen

ii) In den Öffnungen entsprechen φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}$
 den Werten einer einfallenden Welle bei
 Abwesenheit der Hindernisse
 ($\hat{=}$ 1. Bornsche Näherung)

Sämtliche Standardberechnungen von Biegungs-
erscheinungen beruhen auf diesen Annahmen.

Leider math. inkonsistent, da aus Wellenlgl.

folgt, dass, wenn φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ Null auf einer
bel. Fläche verschwinden, $\varphi = 0$ überall gilt.

Verbesserung: - vektorielle Biegetheorie
- geeignete Grenz-Fkt., die RB
genügt.