

Weiter zu 10.2 Skalare Beugungstheorie

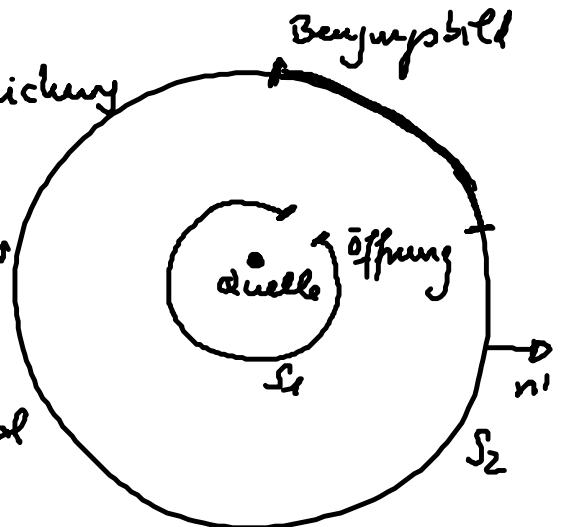
kurze WH: - Startpunkt: Helmholtz Gleichung

- ges.: $\varphi(r) / S_2$

z.B. eine Komponente des E-Felds

- über Greens Satz \rightarrow

Kirchhoffsches Beugungsintegral



$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} dA' \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n} \cdot \left[\nabla' \varphi(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{kR}\right) \frac{\vec{R}}{R} \varphi(\vec{r}') \right]$$

S_1

d.h. aus $\varphi(r)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$
auf S_1 folgt $\varphi(r)$ im
ganzen Volumen

- Kirchhoffsche Annahmen

$S_2 \rightarrow \infty$

(Fraunhofer Beugung)
 \nearrow
Beugung im Fernfeld

Fernfeldnäherung $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ im Beugungsintegral

$$kR = k |\vec{r} - \vec{r}'| = kr \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} kr - k \vec{r}' \cdot \vec{e}_r + \dots$$

Fraunhofer Beugung
d.h. Schirm ist weit
weg (Fernzone)

Fresnel-Beugung
(Nahzone)

Beugungsintegral für die Fraunhofer Beugung

$$\varphi(\vec{r}) = - \frac{e^{ikr}}{r} \oint_{S_1 [\text{Öffnung}]} dA' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} [\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \varphi^o(\vec{r}') + i\vec{k} \cdot \vec{n}' \varphi^o(\vec{r}')]]$$

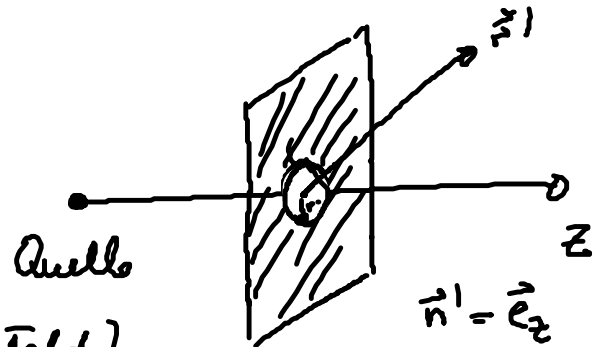
$\vec{k} = k \vec{e}_r$, zweiter Term $\sim \frac{1}{R^2}$ vernachlässigt, da quadratisch in r

Mit Kirchhoffschen Annahmen ist $\varphi(\vec{r}')|_{S_1} = \varphi^o(\vec{r}')|_{S_1}$ bekannt.

Beispiel: Beugung durch Kreisapertur

Apertur in der $x \cdot y$ -Ebene mit dem Radius R_0 .

Annahmen: ebene Wellen in der Öffnung (einfallendes Feld)



$\hat{=}$ Kirchhoffsche Annahmen

$$\varphi(\vec{r}') = E_z \vec{e}_z = E_0 e^{ikz'}$$

Einsetzen in das Fraunhofer Beugungsintegral

$$\varphi(\vec{r}') = - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R_0} dp' p' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} E_0 (ik + i\vec{k} \cdot \vec{e}_z)$$

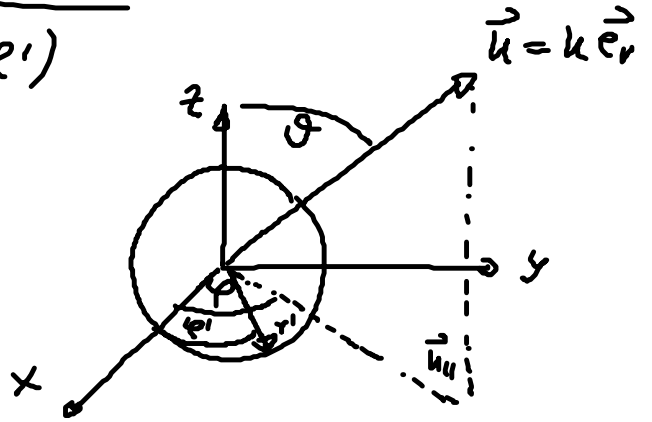
Oberflächenintegral über Kreisapertur mit Radius R_0

$$\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') = ik E_0 e^{ikz'} \Big|_{z=0}^1$$

$$\vec{k} = k \vec{e}_r = k (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$$

$$\vec{r}' = \rho' (\cos\varphi', \sin\varphi', 0) \quad \text{Vektor in der Öffnung}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = k \rho' \sin\theta \underbrace{(\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi')}_{\cos(\varphi - \varphi')}$$



$$\varphi(\vec{r}) = -i \frac{e^{ikr}}{4\pi r} E_0 k \int_0^{R_0} d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-ik\rho' \sin\theta \cos(\varphi - \varphi')} (1 + \cos\theta)$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-ik\rho' \sin\theta \cos(\varphi - \varphi')} = 2\pi J_0(k\rho' \sin\theta)}$$

$$\frac{J_1(kR_0 \sin\theta)}{kR_0 \sin\theta} R_0^2$$

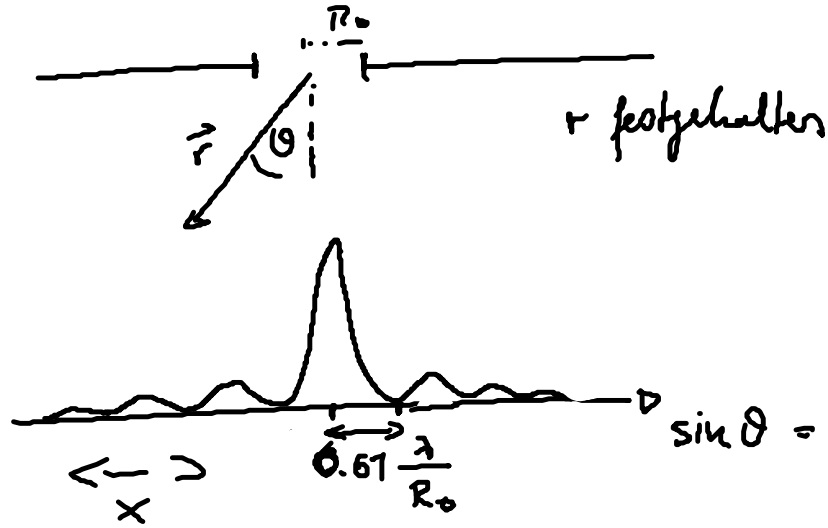
$$\varphi(r) = -i \frac{k E_0 e^{ikr}}{2r} (1 + \cos\theta) \frac{J_1(kR_0 \sin\theta)}{kR_0 \sin\theta} R_0^2$$

in einer
vektoriellen Theorie

Beugungsfeld an einer kreisförmigen Blende mit Radius R_0

$$\text{Intensität } |E|^2(\theta) \sim \left| \frac{J_1(kR_0 \sin\theta)}{kR_0 \sin\theta} \right|^2$$

analog zu $\frac{\sin x}{x}$



d.h. das meiste Licht geht geradeaus, es existieren aber immer kleiner werdende Maxima

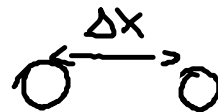
$$\sin \theta = \frac{x}{r}$$

Frequenz der Oszillation $\sim k R_0 \sim \frac{R_0}{\lambda}$

- i) falls $R_0 \gg \lambda$: rapider Zerfall der Oszillation (große Öffnung) \rightarrow geringer Kontrast zwischen den Maxima
- ii) falls $R_0 \approx \lambda$: starker Kontrast zwischen den Maxima, da das Ableitende nicht so stark ist
- iii) falls $R_0 \ll \lambda$: skalare Beugungstheorie nicht anwendbar

Auflösungsvermögen optischer Geräte:

Zwei aufzulösende punktförmige Objekte ergeben 2 Beugungsbilder



2 Pkt. sind gerade noch trennbar, wenn 1. Max. von Pkt. 1 in das 1. Min. von Pkt. 2 fällt:

$$\frac{r}{R_0} > 1$$

$$\Delta x = 0.61 \frac{\lambda}{R_0} r > 0.61 \lambda$$

$\Delta x \approx \lambda/2$ ist der min Abstand von 2 beobachteten Pkt., die getrennt detektiert werden können.

Dieses Kriterium wird innerhalb der Nahfeldoptik ($r, R_0 \leq \lambda$) außer Kraft gesetzt \rightarrow Verbesserung der Auflösung.

Bsp.: Auge: $R_0 \approx 2\text{mm}$, $r = 20\text{cm}$

$$\Delta x = 0.61 \lambda \frac{r}{R_0} \approx 30 \mu\text{m}$$

10.3 Geometrische Optik

Geometrische Optik bzw. Strahlenoptik bezeichnet den Grenzfall der Lichtausbreitung, in dem die Wellennatur des Lichts keine Rolle spielt

(Beugungs- und Interferenzeffekte vernachlässigbar)

- i) $\lambda \rightarrow 0$, d.h. geometrische Strukturen \gg Wellenlänge
- ii) Vernachlässigung der Vektoreffekte \rightarrow skalares Feld φ

$$\left(\Delta + k_n^2(r) \right) \varphi(\vec{r}) = 0 \quad \text{mit } k_n = \frac{\omega}{c} n(r) = k n(r)$$

- iii) Schwache Änderung von $n(r)$ innerhalb einer Wellenlänge λ mit $n \in \mathbb{R}$, d.h. transparente Medien (keine Absorption)

$$|\nabla n(r)| \lambda \ll n$$

(konsistent mit Annahme i)

Idee: Löser der Wellenl. \rightarrow Strahlenzug in inhomogenen Medien (Verallgemeinerung des Brechungsgesetzes)

Allg. Lösungsansatz:

$$\varphi(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{ikS(\vec{r})}$$

Amplitude schwach
veränderlich \uparrow Eikonal

Einsetzen in die Wellenl.:

$$\nabla \varphi(\vec{r}) = (\nabla A(\vec{r})) e^{ikS(\vec{r})} + A(\vec{r}) ik(\nabla S(\vec{r})) e^{ikS(\vec{r})}$$

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \underline{\Delta A(\vec{r})} e^{ikS(\vec{r})} + \underline{2ik(\nabla S(\vec{r})) \cdot (\nabla A(\vec{r}))} e^{ikS(\vec{r})} - \underline{k^2 A(\vec{r}) (\nabla S(\vec{r}))^2} e^{ikS(\vec{r})} + \underline{ik A(\vec{r}) \Delta S(\vec{r})} e^{ikS(\vec{r})}$$

$$\Delta \varphi(\vec{r}) + k_n^2(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = k^2 \left[n^2(\vec{r}) - (\nabla S(\vec{r}))^2 \right] A(\vec{r}) e^{ikS(\vec{r})} + ik \left[\Delta S(\vec{r}) A(\vec{r}) + 2(\nabla A(\vec{r})) \cdot (\nabla S(\vec{r})) \right] e^{ikS(\vec{r})} + \underline{\Delta A(\vec{r})} e^{ikS(\vec{r})} = 0$$

vernachlässigbar, da $A(\vec{r})$ schwach veränderlich

Eikonalgleichung:

$$\operatorname{Re}[\dots] = 0 \rightarrow \text{i) } [\nabla S(\vec{r})]^2 = n^2(\vec{r})$$

$$\operatorname{Im}[\dots] = 0 \rightarrow \text{ii) } 2 \nabla [\rho_n A(\vec{r})] \cdot \nabla S(\vec{r}) = -\Delta S(\vec{r})$$
$$\begin{aligned} & \uparrow \\ & -[\Delta S(\vec{r})] A(\vec{r}) = -2 (\nabla A(\vec{r})) \cdot (\nabla S(\vec{r})) \\ & -\Delta S(\vec{r}) = -2 \underbrace{\frac{1}{A(\vec{r})} \nabla A(\vec{r})}_{\nabla \ln A(\vec{r})} \cdot \nabla S(\vec{r}) \end{aligned}$$

Lösungsprinzip:

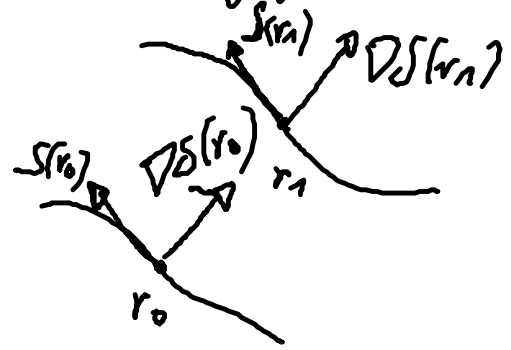
$n(\vec{r})$ ist vorgegeben (z.B. Luftmoleküle als Fkt. der Höhe.)

- 1) 1. Eikonalgl. \rightarrow Phase $S(\vec{r})$ wird bestimmt
 - 2) 2. — " — \rightarrow Amplitude $A(\vec{r})$ wird bestimmt
- $\Rightarrow \varphi(\vec{r})$ bekannt

Interpretation von $S(\vec{r})$:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) \approx \underbrace{A(\vec{r}_0)}_{A_0} e^{ikS(\vec{r}_0)} e^{ik \nabla S(\vec{r}_0) \delta\vec{r}}$$
$$\varphi(\vec{r}) = A_0 e^{ik \nabla S(\vec{r}_0) \delta\vec{r}}$$

$\rho(r)$ entspricht einer ebenen Welle am Ort \vec{r}_0 mit dem Wellenvektor $\vec{k}(\vec{r}_0) = k \nabla S(\vec{r}_0)$, die sich um $d\vec{r}$ ausbreitet. Die Strahlrichtung ist also gegeben durch $\nabla S(\vec{r}_0)$.



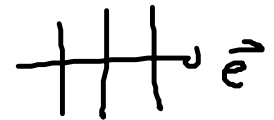
Beispiel A: $n = \text{const.}$

$$1. \text{ Eikonalgl. } (\nabla S(\vec{r}))^2 = n^2(\vec{r})$$

$$\rightarrow \nabla S(\vec{r}) = n \vec{e}$$

d.h. Strahlrichtung ist konstant und überall gleich
Die Strahlen sind Geraden. Die Flächen $S = \text{const.}$
sind Ebenen, die senkrecht zu \vec{e} stehen

Beispiel B: Grenzfläche mit konstanten Brechzahlen n_1, n_2



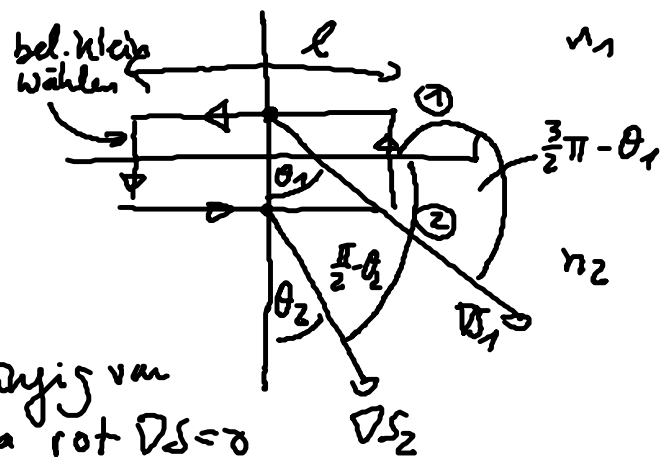
$$\nabla \times \nabla S(\vec{r}) = 0$$

$$\text{da } \nabla \times \nabla \dots = 0$$

$$\oint d\vec{r} \nabla S(\vec{r}) = 0$$

$$n_i \vec{e}_i$$

unabhängig von Weg, da $\text{rot } \nabla S = 0$

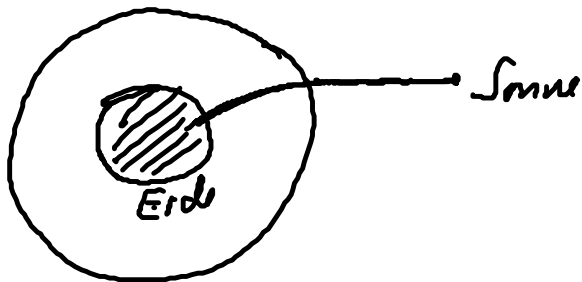


$$\textcircled{1} \quad \parallel \quad \textcircled{2} \quad l n_1 \cos\left(3\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + l n_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = 0$$

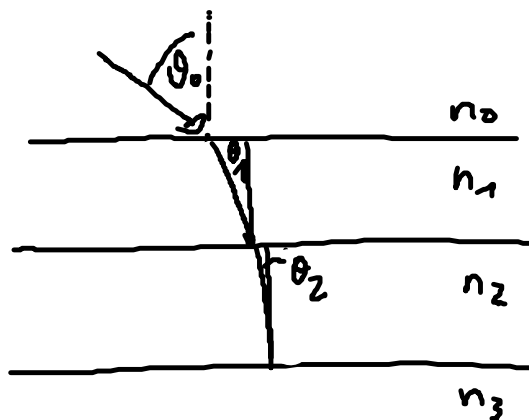
$$= e [n_1 \sin \theta_1 + n_2 \sin \theta_2] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad \hat{=} \text{ Brechungsgesetz}$$

Beispiel C) Brechung des Sonnenlichts



Schräger Einfall des Strahls zur Erde hin gebogen wegen des Dichtegradienten und damit des Brechzahlgradienten, d.h. Brechung zum Lot hin bei Ausbreitung von dünn nach dicht



graduelle
Erhöhung von n
 $n_i < n_{i+1}$
 \Rightarrow
 $\theta_i > \theta_{i+1}$

11. Führung und Speicherung von Wellen

Wichtig für viele Anwendungen, z.B. Laser, Glasfaser

Betrachten Wellenlösungen in einem Volumen, das durch Metallwände begrenzt sind.

Speicherung in Resonatoren

Führung in Wellenleitern



aktives Medium

Volumen von einer geschlossenen Metallfläche begrenzt \rightarrow nur bestimmte Eigenschwingungen (Moden) des Felds werden gespeichert, z.B. Laser



zu untersuchendes Medium

Volumen in einer Richtung ist unbegrenzt, d.h. Ausbreitung von Wellen in dieser Richtung, z.B. Glasfaser

Leitfähigkeit, Suszeptibilität und Geometrie von Materialien wichtig.

Bei Mikrowellen eignen sich Metalle gut, bei Infrarot und im optischen Bereich eher dielektrische Fasern (geringe Absorption).