12.5. Viererschreibweise f. Maxwellfeld

in ähnlicher Weise, wie die Aufteilung der Komponenten des Viererstroms j^α von KS abhängt, hängt auch die Aufteilung des magnet./elektr. Felds von KS ab, und ändert sich bei $\Sigma \to \Sigma'$.

das em. Feld wird sich als Lorentztensor erweisen, da die Trafo eines Lorentztensors bekannt ist, kann man dann $E, B \to E', B'$ umrechnen.

12.5.1. Potentiale

Potentialgleichungen:

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}}_{x_0} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{x_{1..3}} \Big) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}^2 - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (2)$$

können wir auch Vierpotential das ein Vierervektor ist, aufschreiben?

1 Gleich. 3 Gleich.

$$\underbrace{(1)\quad \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2)\quad \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = \mu_0 \vec{j}}_{\text{4-er Gleich.:}}$$

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha} \quad \text{für } \alpha = 0, 1, 2, 3$$

für $\alpha = 1, 2, 3$ ist das genau Gleich. (2)

$$j^\alpha = \left(\frac{\rho}{\mu_0 \varepsilon_0 c}, j^x, j^y, j^z\right) = \left(\underbrace{c\rho}_{j^0}, j^x, j^y, j^z\right)$$

$$A^\alpha = \left(\frac{\phi}{c}, A^x, A^y, A^z\right)$$

Gleich. des Vierpotentials A^α mit Vierstrom j^α.

Das definierte Viererpotential ist auch ein Vierervektor, was man mit Hilfe der Lorentzeichung zeigen kann:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad \text{Lorenzeichung !}$$

$\hat{=}$ $\partial_\mu A^\mu = 0$, sieht aus wie die

Kontinuitätsgl. f. Viererstrom $\partial_\mu j^\mu = 0$.

$\longrightarrow$ eine analoge Rechg. zu A^μ zeigt, daß

analog zu j^μ, A^μ auch ein Vierervektor ist

und daher

$$A'^\mu = \Omega^\mu_{\ \nu} A^\nu$$

(analog zu Trafo von x^μ)

Damit ist man in der Lage, auch die Potentiale ϕ, A über

A^μ umzurechnen von $\Sigma \to \Sigma'$.

12.5.2. Feldstärken

Idee : um die 6 Feldstärken in

Vierschreibweise abzubilden brauchen wir „höheres Objekt“,

das liefert wir versuchen ein Lorenztensor.

Def eines Lorentztensor: $F'^{\mu\nu} = \Omega^{\mu}_{\ \alpha}\, \Omega^{\nu}_{\ \beta}\, F'^{\alpha\beta}$

billigste Ansatz ist Tensorprodukt zweier Vierektoren

$F^{\mu\nu} = B^{\mu} C^{\nu}$ aus diesen Indizes die Matrix bauen.

diese Def. stellt den Lorentzcharakter sicher, weil sowohl B als auch C durch durch je 1 LT umgerechnet.

Ansatz für den Tensor d. em. Felds

$$F^{\mu\nu} = -\partial^{\mu} A^{\nu} + \partial^{\nu} A^{\mu}$$

$$\partial^{\mu} = (\partial_{ct}, -\vec{\nabla}) \ ; \ A^{\mu} = (\phi/c, \vec{A})$$

erfüllt den Lorentzcharakter weil durch Vierervektoren aufgebaut und Antisymmetrie $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

$\rightarrow$ Diagonalelemente $= 0$, Nichtdiagonale sind $\vec{E}, \vec{B}$

Zeigen: $F^{\mu\nu}$ hat etwas mit $\vec{E}, \vec{B}$ zu tun (a)

$F^{\mu\nu}$ erfüllt die Maxwellgl. (b)

(a) $F^{10} = -\partial^1 A^0 + \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial}{\partial ct} A^x$

$= -\frac{1}{c} E_x \qquad \left(E_x = -\partial_x \phi - \partial_t A^x \right)$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

wenn alle Einheiten beachtet werden.

um diese relativistische Theorie zu formulieren und zw. Σ, Σ' hin und herzurechnen wird das E-Feld zum Tensor $F^{\mu\nu}$ zusammengefaßt und stellt damit $\underline{\underline{1}}$ Objekt und damit eine $\underline{\underline{\text{innere}}}$ Einheit dar.

(b) Wo sind die Maxwellgleichungen?

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \underbrace{-\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\substack{\text{linke Seite} \\ \text{der Potentialgleichg.} \\ = -\mu_0 j^\nu}} + \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{\text{Lorenzeichung} = 0}$$

um Maxwelle abzuleiten

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu}$$

Vierformulierg. der Maxwellgleichg. (1.T.)

ausfüh der Indizes gibt 2 Maxwellgleichg.

$$\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}.$$

ohne Beweis:

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0}$$

Vierformulig. d. Maxwellgl. (2. Teil)

$$\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

wichtig ist daß wenn $\vec{E}, \vec{B}$ in Σ gegeben, dann $\vec{E}' \vec{B}'$ in Σ'

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Omega^\mu_{\ \alpha} \Omega^\nu_{\ \beta} F^{\alpha\beta}(x)$$

neue Koordinaten

alten Koordinaten

$\vec{E}', \vec{B}'$ enthalten

$\vec{E}, \vec{B}$ enthalten

durch Ausmultiplizieren der Matrize $\Omega\,\Omega\,F$ und Vergleich

der Matrixelemente mit F' : $\Sigma \xrightarrow[v_x]{} \Sigma'$

$$E'_x = E_x \; ; \quad E'_y = -\gamma\,(E_y + \beta c B_z) \; ; \quad E'_z = \gamma\,(E_z - \beta c B_y)$$

$$B'_x = B_x \; ; \quad B'_y = -\gamma\,(B_y - \beta E_z / c) \; ; \quad B'_z = \gamma\left(B_z + \beta \frac{E_y}{c}\right)$$

damit können Felder umgerechnet werden:

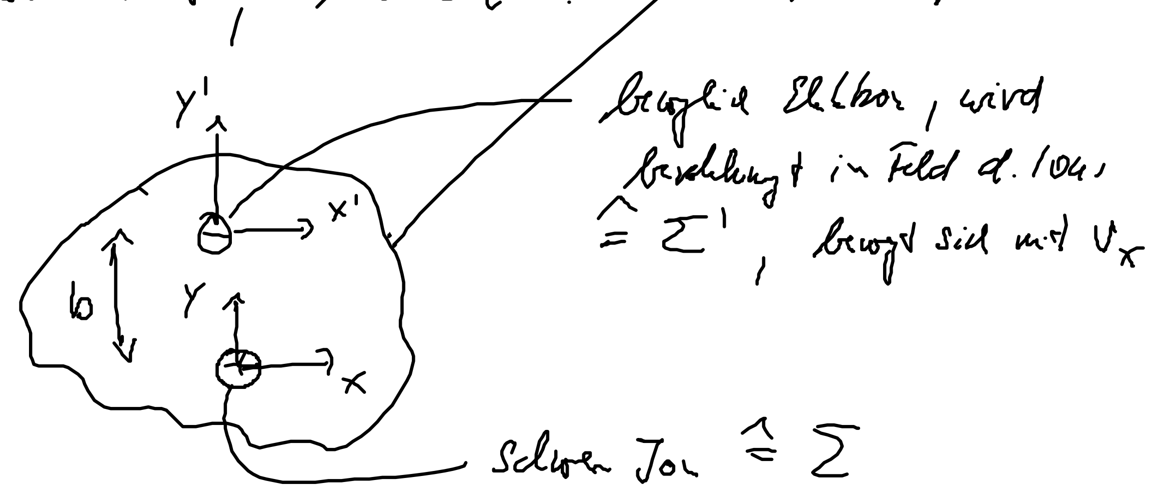
elektrisches u. magnet. Feld mischen u. U. bei $\Sigma \to \Sigma'$.

12.6. Beispiel: Temperatur v. astrophysikalischen Plasmen

Anwendung der Formeln zur Feldumrechnung.

Bestimmung der Plasmatemperatur T aus dem

emittierten Licht, Modell: $\vec{E}(r,t) \to$ Spektrum $S(\omega)$



$$\langle E \rangle \approx \frac{3}{2} kT \quad \text{aus statist. Physik}$$

mittlere Energie
(kinetisch)

<u>Berechnung d. Spektrums:</u>

$$S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, E(t)\, e^{-i\omega t} \right|^2 \simeq |E_\omega|^2$$

$$E_\omega = i\omega \int d^3r'\, j_\omega^T(\vec{r}\,')\, \frac{e^{ikr}}{r} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

Fernfeld gilt im einfachsten Fall Kugelwelle

$$\int d^3r'\, j_\omega^T(\vec{r}\,') = \int dt\, e^{-i\omega t} \int d^3r'\, q\, \dot{\vec{r}}_0(t)\, \delta^T(\vec{r}\,' - \vec{r}_0(t))$$

Strom des e^-

Bahnkurve e^-

$$\simeq \int dt\, e^{-i\omega t}\, q\, \dot{\vec{r}}_0(t)$$

$$E_\omega = i\omega\, q\, v_0(\omega)\, \frac{e^{ikr}}{r}$$

Geschwindigkeit (ω) bestimmt Emission

Lorentzkraft

E-Feld d. Ions „F"

$$\dot{v}_0 = \frac{q}{m} F(\vec{r}_0)$$

muß in Σ' geschieht, weil El diese Kraft spürt

Kraft die. da El aufgrund d. Ions verspürt

Im System wo Ion ruht Σ

kennen wir F : elektrostatische Punktladung

$$\Sigma \xrightarrow{v_x'} \Sigma' \qquad v_x = v_0$$

ruhende Ion — Feld auf den Elektron — Z - Ionladung.

Σ : $F_x = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}$ Σ' $F_x' = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}$

$F_y = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3}$ $F_y' = \gamma\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3}$

$F_z = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$ $F_z' = -\gamma\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$

+ B-Feld B_z

Es müssen auch noch die Koordinaten $x \to x'$ umgerechnet werden.

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = b + y', \quad z = z'$$

(Bewegung in z Ebene)

$$r^2 = x^2 + y + z^2 .$$

Ort d. El.

im System Σ' interessiert uns der Ort d. Elektrons:

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \qquad \Sigma$$

$$(x, y, z) \to \underbrace{x_0 = \gamma v t', \quad y_0 = b, \quad z_0 = 0}_{\text{Koordinaten}} \qquad \Sigma'$$

einsetzen:

$$F_x' = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma v_0 t'}{(\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$F_y' = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b}{(\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$F_z' = 0$$

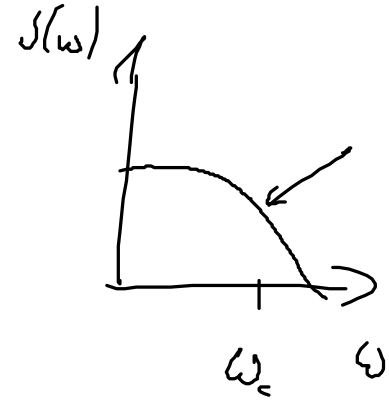
elektrisch Feld die El im Feld a. lokal verspürt

abgestrahlte Feld $E_\omega \sim F(\omega)$

Interpretation: $S(\omega)$ kann durch FT von $F(t)$ ausgedrückt werden.

$F_x \to 0$ für $t' \to \infty$ und f. $t' \to 0$

F_Y ist der wichtigste Beitrag



Breite der $F_Y(\omega)$ im ω-Raum ist durch die inverse Breite in Zeit gegeben $\frac{v_0}{b}\rho^2 = \omega_c$

$\omega_c = \omega_c(v_0, b)$

$F_Y(\omega) \to K_1(\omega)$

modifizierte Besselfkt. 1. Ordnung

Man kann jetzt v_0, b als Fkt. der Temperatur ausdrücken.

$E_{kin} \hat{=} \frac{m}{2} v_0^2 \hat{=} \frac{3}{2} kT$, $E_{pot} \hat{=} \frac{1}{b} = \frac{3}{2} kT$

$$b \sim \frac{1}{T}$$

Man kann also das Spektrum messen, ω_c bestimmen und diese in ein Temperatur umrechnen.

Rechng. war nur so „einfach" weil man Σ in Σ' umrechnen konnten