

## 12.5. Viererdrreibweise f. Maxwellfeld

in ähnlicher Weise, wie die Aufteilung der Komponenten des Viererstroms  $j^\alpha$  von  $KS$  abhängt, hängt auch die Aufteilung des magnet. / elektr. Felds von  $KS$  ab, und ändert sich bei  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ .

das em. Feld wird sich als Lorentztensor erweisen, da die Trafo eine Lorentztransf. bekannt ist, kann man dann  $E, B \rightarrow E', B'$  umrechnen.

### 12.5.1. Potential

Potentialgleichung ::

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \end{array} \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x_0} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{x_{1..3}}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial(ct)} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (2)$$

Können wir auch Vierpotential das ein Viervektor ist, aufschreiben?

$$(1) \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \leftarrow 1 \text{ Gleichg.}$$

$$(2) \quad \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \leftarrow 3 \text{ Gleichg.}$$

4-es Gleichg. :

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha} \quad \text{für } \alpha = 0, 1, 2, 3$$

für  $\alpha = 1, 2, 3$  ist das genau Gleichg. (2)

$$j^\alpha = \left( \frac{\rho}{\mu_0 \epsilon_0 c}, j^x, j^y, j^z \right) = \left( c\rho, j^x, j^y, j^z \right)$$

$$A^\alpha = \left( \frac{\phi}{c}, A^x, A^y, A^z \right) \quad \uparrow \quad j^0$$

Gleichg. des Vierpotentials  $A^\alpha$  mit Vierstrom  $j^\alpha$ .

Das definierte Vierpotential ist auch ein Viervektor,

was man mit Hilfe der Lorenzbedg zeigen kann:

$$\frac{1}{c^2} \partial_c \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \text{Lorenz bedg!}$$

$$\hat{=} \partial_\mu A^\mu = 0, \text{ sieht aus wie die}$$

Kontinuitätsgl. f. Viererpot  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

→ ein analyt. Bedg. zu  $A^\mu$  zeigt, daß  
analyt. in  $f^\mu, A^\mu$  auch ein Viererpot ist

und daß

$$A'^\mu = \Omega^\mu_\nu A^\nu$$

(analyt. zu Info von  $x^\mu$ )

Damit ist man in der Lage, auch die Potentiale  $\mathcal{A}$  über

$A^\mu$  um zu reduzieren von  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ .

## 12.5.2. Feldstärken

Idee: um die 6 Feldstärken in

Vier Schreibweise abzubilden, braucht man „höheres Objekt“,

das heißt wir brauchen ein Kontextensor.

Def eines Lorentztensor:  $F'^{\mu\nu} = \Omega_{\alpha}^{\mu} \Omega_{\beta}^{\nu} F'^{\alpha\beta}$

billigste Ansatz ist Tensorprodukt zweier Vierer vektoren

$$F^{\mu\nu} = \underbrace{B^{\mu} C^{\nu}}_{\text{aus den Indizes die Matrix bauen.}}$$

diese Def. stellt die Lorentzcharakteristika sicher, weil sowohl B als auch C Lorentzvektoren sind und für 1 LT umgerechnet.

Ausatz für den Tensor d. em. Felds

$$F^{\mu\nu} = -\partial^{\mu} A^{\nu} + \partial^{\nu} A^{\mu}$$

$$\partial^{\mu} = (\partial_{ct}, -\vec{\nabla}); \quad A^{\mu} = (\phi/c, \vec{A})$$

erfüllt die Lorentzcharakteristika weil durch Vierer vektoren aufgebaut und Antisymmetrie  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ .

→ Diagonalelemente = 0, Nichtdiagonale sind  $\vec{E}, \vec{B}$

zeige:  $F^{\mu\nu}$  hat etwas mit  $\vec{E}, \vec{B}$  zu tun (a)

$F^{\mu\nu}$  erfüllt die Maxwellgl. (b)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad F^{10} &= -\partial^1 A^0 + \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{c} + \frac{\partial}{\partial ct} A^x \\
 &= -\frac{1}{c} E_x \quad (\bar{E}_x = -\partial_x \phi - \partial_t A^x)
 \end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn alle Werte bekannt werden.

Um die relativistische Theorie zu formulieren und  
 zw.  $\Sigma, \Sigma'$  hin und herzurechnen wird das ein Feld  
 zu Tensor  $F^{\mu\nu}$  zusammengefasst und stellt  
 damit 1 Objekt und damit ein invariantes Ergebnis dar.

(b) Wo sind die Maxwellgleichung?

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\text{linke Seite der Potentialeq.}} + \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}_{\text{Konzeidung} = 0}$$

$\nearrow$  um Maxwell ableiten  
 $= -\mu_0 j^\nu$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu}$$

Vierformulierung der Maxwellgleichg. (1. Fall)

aus fñh der Indizes folgt 2 Maxwellgleichg.:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \overset{!}{\nabla} \times \vec{E}$$

oder Beweis:

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0}$$

Vierformulierung d. Maxwellgl. (2. Fall)

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

wichtig ist daß wenn  $\vec{E}, \vec{B}$  in  $\Sigma$  gegeben, so  $\vec{E}', \vec{B}'$  in  $\Sigma'$

$$F'^{\mu\nu}(x') = \underbrace{\Omega^\mu_\alpha}_{\text{neue Koord.}} \underbrace{\Omega^\nu_\beta}_{\vec{E}, \vec{B} \text{ alt.}} F^{\alpha\beta}(x)$$

$\nearrow$  neue Koord.  
 $\nearrow$  alt. Koord.  
 $\vec{E}, \vec{B}$  alt.

durch Ausmultiplizieren der Matrizen  $\Omega \Omega^T$  und Vergleich der Komponenten mit  $F' : \Sigma \rightarrow \Sigma'$   
 $v_x$

$$E'_x = E_x ; E'_y = -\gamma (E_y + \beta c B_z) ; E'_z = \gamma (E_z - \beta c B_y)$$

$$B'_x = B_x ; B'_y = -\gamma (B_y - \beta E_z / c) ; B'_z = \gamma (B_z + \beta E_y / c)$$

damit können Felder umgerechnet werden:

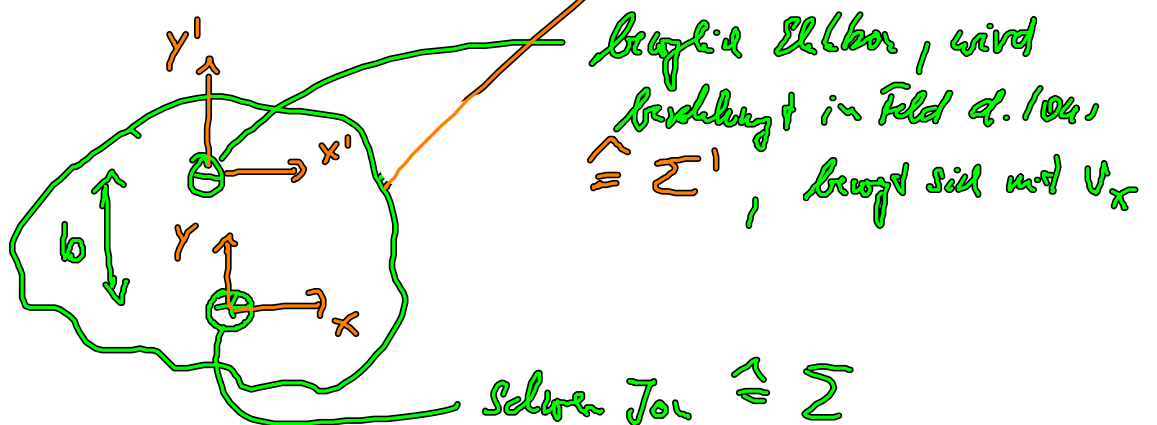
elektrisch u. magnet. Feld misst u. U. bei  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ .

## 12.6. Beispiel: Temperatur u. astrophysikalischer Plasmas

Anwend. der Formeln zur Feldumrechnung.

Bestimmung des Plasmatemp.  $T$  aus den

ein hier Licht, Modell:  $\vec{E}(r, t) \rightarrow$  Spalten  $S(s)$



$$\langle E \rangle \approx \frac{3}{2} kT \quad \text{aus statist. Physik}$$

↑  
in der Fernzone  
(kleinwinklig)

Bedeutung d. Spalten:

$$S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{E}(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \approx |\vec{E}_\omega|^2$$

$$\vec{E}_\omega = i\omega \int d\vec{r}' \vec{j}_\omega^T(\vec{r}') \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Fernfeld gibt in einfachster Fall Kugelwelle

$$\int d\vec{r}' \vec{j}_\omega^T(\vec{r}') = \int dt e^{-i\omega t} \int d\vec{r}' q \dot{\vec{r}}_0(t) \delta^T(\vec{r}' - \vec{r}_0(t))$$

↑  
Ihre da  $e^{-}$

↑  
Ballistik  $e^{-}$

$$\approx \int dt e^{-i\omega t} q \dot{\vec{r}}_0(t)$$



$$E_{\omega} = i\omega q v_0(\omega) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{fortbewegung (\omega) \quad \text{lokale Emission}}$$

Korrekturen

$$v_0 = \frac{q}{m} F(\vec{r}_0)$$

E-Feld d. Ions "F"

wegen  $\Sigma'$  geschickt,  
weil El dich Kraft spürt

Kraft die da El aufgrund  
d. Ions verspürt

In Syst wo Ion ruht  $\Sigma$

kann wir  $F$ : elektrostatisch Punktladung

$$\Sigma \xrightarrow{v_x} \Sigma'$$

$$v_x = v_0$$

↑  
ruht Ion

↑  
Feld auf der Elektro

z-feld

②

$$F_x = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}$$

②

$$F'_x = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}$$

$$F_y = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}$$

$$F'_y = \gamma \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}$$

$$F_z = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

$$F'_z = \gamma^2 \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

+ B-Feld  $B_z$

→ misst auch noch die Koordt  $x \rightarrow x'$  ungedat word.

$$x = \gamma (x' + vt'), \quad y = b + y', \quad z = z'$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

↳ Bezug ist z. Eben

Ort d. El.

in Sph  $\Sigma'$  ist mit aus der Ort d. Elks:

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \quad \Sigma$$

$$(x, y, z) \rightarrow \underbrace{x_0 = \gamma vt', \quad y_0 = b, \quad z_0 = 0}_{\text{Koordt}} \quad \Sigma'$$

Koordt

elektro:

$$F_x' = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v_0 t'}{(v^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$F_y' = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{(v^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$F_z' = 0$$



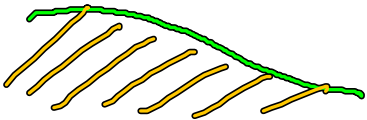
elktisch Feld die  $\mathcal{E}$  im Feld  $\alpha.10^6$  V/m

abgeschaltete Feld  $\bar{E}_\omega \sim F(\omega)$

Feldspektrum:  $S(\omega)$  kann durch FT von  $F(t)$  angedeutet werden.



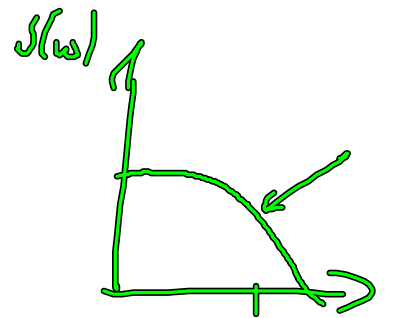
$\bar{F}_x \rightarrow 0$  für  $t' \rightarrow \infty$  und für  $t' \rightarrow 0$



$\bar{F}_y$  ist der wichtigste Beitrag

Breite des  $\bar{F}_y(\omega)$  im  $\omega$ -Raum ist durch die inverse Breite in

Zeit gegeben  $\frac{v_0}{b} \tau^2 = \omega_c$



$\omega_c = \omega_c(v_0, b)$

$\bar{F}_y(\omega) \rightarrow k_r(\omega)$

→ modifiziert Bessel-Fkt. 1. Ordnung

Man kann jetzt  $v_0, b$  als Fkt. der Temperatur ausdrücken.

$\bar{E}_{kin} \hat{=} \frac{m}{2} v_0^2 \hat{=} \frac{3}{2} kT$  ,  $\bar{E}_{pot} \hat{=} \frac{1}{b} = \frac{3}{2} kT$

$$b \sim \frac{1}{T}$$

Man kann also das Spektrum messen,  $\omega_c$  bestimmen und diesen in die Temperatur umrechnen.

Reduz. war uns so „einfach“ weil man  $\Sigma$  in  $\Sigma'$  umrechnen konnte.