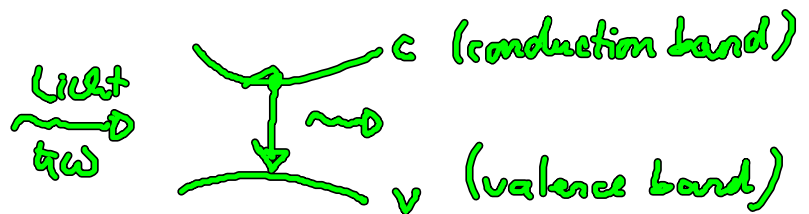


Anmeldung zur Klausur nicht vergessen!

Zusatz III: Quantisierung des elektromagnetischen Felds

Bisher hatten wir einen semiklassischen Ansatz, d.h. die Teilchen wurden quantenmechanisch behandelt und die Felder klassisch. Der Ansatz ist ausreichend für die meisten Probleme der Elektrodynamik.

Ausnahme: - Spontane Emission ist ein qm Effekt:
Emission von Photonen ohne äußere Einwirkung
im Gegensatz zur stimulierten Emission



Lässt sich auf Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Felds zurückführen
(Energie-Zeit Unschärfe)

- nichtklassische Zustände des Lichts,
z.B. kohärente Zustände (Glauber Zustände)
→ unterschiedliche Photonstatistiken (Quantenoptik)

1. Hamilton-Operator

Einfachste Situation: Resonator mit Volumen V
 Vakuum als Grenzfall $V \rightarrow \infty$

Klassische Feldenergie:

$$H = \int d^3r \left[\frac{\epsilon_0}{2} E^2(r,t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(r,t) \right]$$

Entwicklung des Felds nach Moden λ :

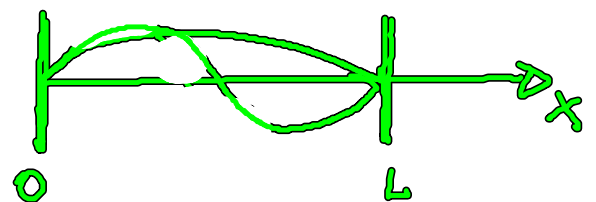
$$\vec{E}(r,t) = \sum_{\lambda} \vec{u}_{\lambda}(r) E_{\lambda}^{\pm}(t) + \text{c.c.} \quad E_{\lambda}^{\pm} \text{ zeitabhängige Koeffizienten}$$

Im freien Raum sind $\vec{u}_{\lambda}(r)$ Lösungen der Wellengleichung (\rightarrow Amplituden)

$$\vec{u}_{\lambda}(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{e}_{\sigma}(\vec{k}) \leftarrow \text{Polarisationsvektor}$$

Im 1-dim Resonator als einfaches Beispiel

$$u_{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\lambda\pi}{L} x\right) = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\omega_{\lambda}}{c} x\right)$$



stehende well

mit $\omega_{\lambda} = \frac{\lambda\pi}{L} c$

$$L = \lambda \frac{\lambda}{2} \quad \lambda \text{ Wellenlänge}$$

E_{λ}^{\pm} sind unbekannt / gesucht.

Zunächst werden dimensionlose Größen $b_{\lambda}(t)$ eingeführt

$$E_{\lambda}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_0}} \sqrt{\hbar\omega_{\lambda}} \underline{b}_{\lambda}^*(t)$$

gesuchte Größe

Heuristische Quantisierung:

$b_{\lambda}, b_{\lambda}^* \longrightarrow \underline{b}_{\lambda}, \underline{b}_{\lambda}^{\dagger}$ Photon-Erzeuger bzw.
 Zahlen \longrightarrow Operatoren Photon-Vernichter
 die die Boson-Vertauschungsrelation erfüllen

$$[b_{\lambda}, b_{\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$= b_{\lambda} b_{\lambda'}^{\dagger} - b_{\lambda'}^{\dagger} b_{\lambda}$$

Hamilton-Operator $H \longrightarrow \underline{H}(\underline{b}_{\lambda}, \underline{b}_{\lambda}^{\dagger})$

$$H = \int dx \left[\frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2(x,t) + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2(x,t) \right]$$

Einfachster Fall: eine Mode λ in z -Richtung polarisiert

$$E_z = E_{\lambda}^{-} u_{\lambda} + c.c$$

$$= i \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} (b^{\dagger} - b)$$

gesucht ist die B -Komponente

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E}$$

$$\underline{\partial_x B_y - \partial_y B_x} = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z$$

transversale Felder
 Ausbreitung in x -Richtung
 E -Feld in z -Richtung

$$\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z$$

→ B-Feld in y-Richtung

Mit $b(t) = b_0 e^{-i\omega t} \rightarrow -i\omega$

$$\partial_t E_z = - \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \omega (b^+ + b) \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

$$\stackrel{=0}{=} B_y = - \frac{1}{c^2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \omega (b^+ + b) \int dx \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) = \frac{\epsilon}{\omega} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

$$\underline{B_y = \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \frac{1}{c} (b^+ + b) \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)}$$

Einsetzen der quantisierten Felder in den Hamilton-Operator:

$$H = \int dx \left[\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int dx \left[E^2 + c^2 B^2 \right]$$

$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{2}{L} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \int dx \left[-(b^+ - b)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{c}x\right) + (b^+ + b) \cos^2\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{2}{L} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \left[-(b^+ - b)(b^+ - b) \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2\omega}{c}L\right)}{\frac{4\omega}{c}} \right) + (b^+ + b)(b^+ + b) \left(\frac{L}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2\omega}{c}L\right)}{\frac{4\omega}{c}} \right) \right]$$

ω Eigenfrequenz

$$\omega = \pi c \frac{2}{L}$$

$$\sin\left(2\frac{\omega}{c}L\right) = \sin(2\pi\lambda) = 0$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \left[-(b^\dagger - b)(b^\dagger - b) + (b + b^\dagger)(b + b^\dagger) \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \left(\underbrace{bb^\dagger + b^\dagger b}_{1+b^\dagger b} + bb^\dagger + b^\dagger b \right)$$

da $bb^\dagger - b^\dagger b = 1$

$$\underline{H = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)}$$

Hamilton-Operator einer Lichtmode entspricht dem eines harmonischen Oszillators mit der Quantisierungsenergie $\hbar\omega$. Photon $\hat{=}$ Quant des em. Felds

Im allgemeinen Fall mit mehreren Moden:

$$H = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left(b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

$b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda}$ ist die Anzahl der Photonen in der quantisierten Mode λ

b_{λ}^{\dagger} erzeugt ein Photon in der Mode λ

b_{λ} vernichtet ein Photon in der Mode λ

2. Spontane Emission

Zeitliche Dynamik der Photonenzahl $b_\lambda^\dagger b_\lambda$ wird berechnet.

Heisenberg Bewegungsgl. $i\hbar \frac{d}{dt} b_\lambda^\dagger b_\lambda = [b_\lambda^\dagger b_\lambda, H] = \int \alpha^\dagger \alpha (b^\dagger - b)$

$= \hbar \Omega^* b_\lambda^\dagger \underbrace{a_{\nu k}^\dagger a_{c k}}_{\text{photon-assoziierte Größe}} + c.c$

Kommutieren unter Ausnutzung der Vertauschungsrelation

Rabi-Frequenz $\Omega = \frac{d_{\nu c} E_0}{\hbar}$, $d_{\nu c} \equiv$ Dipolmatrixelement

$i\hbar \frac{d}{dt} b_\lambda^\dagger a_{\nu k}^\dagger a_{c k} = \hbar \Omega [b_\lambda^\dagger b_\lambda (a_{\nu k}^\dagger a_{\nu k} - a_{c k}^\dagger a_{c k}) - \underbrace{(1 - a_{\nu k}^\dagger a_{\nu k})}_{f_{\nu k}} (a_{c k}^\dagger a_{c k})]$

formal integriert im Rahmen der Markov-Approximation

Loch (h) \equiv fehlendes Elektron

Einsetzen in $i\hbar (b_\lambda^\dagger b_\lambda) \dot{}$

$\frac{d}{dt} b_\lambda^\dagger b_\lambda = \Omega^2 \left(\underbrace{b_\lambda^\dagger b_\lambda (1 - f_{\nu k} - f_{c k})}_{(1)} + \underbrace{f_{c k} f_{\nu k}}_{(2)} \right) \frac{2\gamma}{(\omega_k - \omega_\lambda)^2 + \gamma^2}$
 Photonenzahl phänomenologische Konstante

① Induzierte Emission und Absorption proportional zu Photon-Besetzung $b_\lambda^\dagger b_\lambda$

② Spontane Emission unabhängig von äußeren Einflüssen

3. Quantenzustände des Strahlungsfelds im freien Raum

3.1. Schrödinger-Gleichung

$$\hbar\omega (b^\dagger b + \frac{1}{2}) \underline{\phi}_n = \underline{\epsilon}_n \phi_n$$

Eigenenergien ϵ_n und Eigenfunktionen ϕ_n gilt es zu bestimmen. Lösung erfolgt analog zum harmonischen Oszillator in der QM:

i) Eigenenergien: $\epsilon_n = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$n \equiv$ Anzahl der Photonen in der betrachteten Mode

ii) Eigenfunktionen: $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\underline{b}^\dagger)^n \phi_0$

beschreibt einen Zustand mit n Photonen in der Mode, wobei ϕ_0 der Vakuumzustand ist.

iii) $b^\dagger b = \underline{n}$ Photonenzahloperator $b \phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1}$
 $\underline{n} \phi_n = n \phi_n$ $b^\dagger \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}$

iv) Allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gl.

$$\phi(t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i \frac{\epsilon_n}{\hbar} t} \quad \text{dargestellt als}$$

Überlagerung der Eigenfunktionen ϕ_n .

$|c_n|^2$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung n Photonen vorzufinden.

3.2 Charakterisierung möglicher Zustände

Erwartungswert und Schwankung vom E-Feld und der Photonenzahl n für festgelegter Zustand ϕ :

$$\langle \underline{E} \rangle = (\phi, \underline{E} \phi) ; \langle (\Delta E)^2 \rangle = (\phi, (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) \phi)$$

$$\langle n \rangle = (\phi, n \phi) ; \langle (\Delta n)^2 \rangle = (\phi, (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2) \phi)$$

mittleres Meßergebnis und dessen statistische Schwankung um den Mittelwert

Die Ergebnisse sind vom Zustand ϕ , in dem sich das Strahlungsfeld befindet, abhängig:

- I Fockzustand (Photonenzahl-Zustand)
- II Kohärenter Zustand (Glauber Zustand)
- III Thermische Zustand