Info: Physikeraustausch mit Kenia
Infotag 13.2., 17^{00} Uhr, Marienburgerstr. 47
www.ustadi.de

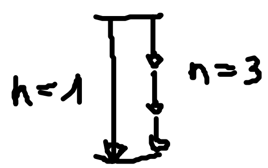
weiter zur **Quantisierung des em Felds**

Charakterisierung von nichtklassischen Zuständen

I Fockzustand ϕ_n
(Photonenzahlzustand)

Einfachster Zustand $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n \phi_0$

entsteht z.B. bei spontaner Emission



Wichtige Eigenschaft: Erwartungswert vom E-Feld verschwindet:

$$\langle \underline{E} \rangle = (\phi_n, \underline{E}\, \phi_n) \quad \text{Skalarprodukt}$$

$$= (\phi_n, \underline{i}\, E_0 (b^+ - b) \sin(kx)\, \phi_n)$$

$$\sim (\phi_n, (b^+ - b)\, \phi_n) = 0 \quad \text{wegen Orthogonalität}$$

denn $(\phi_n, b\, \phi_n) = (\phi_n, \phi_{n-1}) \sqrt{n} = 0$

$(\phi_n, b^+ \phi_n) = (\phi_n, \phi_{n+1}) \sqrt{n+1} = 0$

Schwankung bzw. Varianz vom E-Feld

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle E \rangle}}^2 = \langle E^2 \rangle$$

$$\sim \overset{(i)^2}{-} (\phi_n, (b^+ - b)^2 \phi_n)$$

$$= -(\phi_n, (-b^+ b - \underbrace{b b^+}_{b^+ b + 1}) \phi_n)$$

$$= (\phi_n, (2 b^+ b + 1) \phi_n) = 2n + \underline{\underline{1}}$$

Rauschen des Vakuums

Bei einem Fockzustand verschwindet das E-Feld im Mittel; die Intensität hat einen Anteil proportional zur Photonenzahl und einen Vakuumanteil.

Photonzahl-Operator:

$$\langle \underline{n} \rangle = (\phi_n, \underline{n}\, \phi_n) = n$$

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \underset{n^2}{\underset{\shortparallel}{\langle n \rangle^2}}$$

$$= (\phi_n, \underline{n}^2 \phi_n) - n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

d.h. im Fockzustand ist die Photonzahl scharf gegeben. Es liegen genau n Photonen vor. Die Schwankung um den Mittelwert verschwindet.

Interpretation:

klassisches Analogon für den Fockzustand:

Feld mit statistisch verteilten Phasen

$$E = \sum_j E_j \, e^{i\varphi_j} \qquad |E|^2 = EE^* = \sum_{jj'} E_j E_{j'}^* e^{i(\varphi_j - \varphi_{j'})}$$

Phasemittel $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_i = \langle \ldots \rangle$

$$\langle E \rangle = \sum_j E_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_j \, e^{i\varphi_j}$$

$$= \sum_j E_j \frac{1}{2\pi i} e^{i\varphi_j} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$I = \langle EE^* \rangle = \Big\langle \sum_{\substack{jj' \\ j\neq j'}} E_j E_{j'}^* e^{i(\varphi_j - \varphi_{j'})} \Big\rangle \to 0 \quad \text{da statistisch verteilt}$$

$$+ \Big\langle \sum_j |E_j|^2 \Big\rangle \neq 0$$

$$\neq 0$$

Statistisch verteilte Phasen mitteln das Feld zu Null, aber die Intensität verschwindet nicht.

QM: Wenn die Photonenzahl bzw. die Intensität genau bestimmt ist, so ist die Phase völlig unbestimmt. Es existiert eine Unschärfe zwischen den beiden.

II Kohärenter Zustand (Glauber Zustand)

Eine allgemeine der Schrödingergleichung kann durch Superposition von Photonenzahlzuständen ϕ_n aufgebaut werden: Glauber Zustände kommen klassischen em Wellen sehr nahe, da der Erwartungswert des E-Felds die Form einer klassischen em Welle hat.

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \, |\phi_n\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, |\phi_n\rangle$$

Diese Zustände sind so definiert, dass die Heisenbergsche Unschärfe minimiert ist $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$, so dass die Orts- und Impulsunschärfe gleichzeitig minimal wird. Falls die Minimierung der Unschärfe von einer Größe auf Kosten der anderen geht: squeezed coherent state (gequetschter Zustand)

Unterschiedliche Wege um $|\alpha\rangle$ zu begründen. Wichtig dabei ist, daß kohärente Zustände Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind (ohne Beweis).

$$\underline{\underline{b}}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \qquad *$$

Explizite Form von $|\alpha\rangle$ folgt damit direkt:

$$|\alpha\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\alpha\rangle \qquad \langle\phi_n| = \langle 0|\frac{b^n}{\sqrt{n!}}$$

$$\overset{*}{=} \sum_n |\phi_n\rangle \underbrace{\langle 0|\alpha\rangle}_{\text{gesucht:}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Normierungsbedingung

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \overset{!}{=} 1 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad |\langle 0|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

Damit folgt

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle$$

$$= \sum_n c_n |\phi_n\rangle$$

mit $\quad c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$

Berechnung des E-Felds eines kohärenten Zustands:

$$\langle E \rangle = \left(\phi_\alpha(t), E \phi_\alpha(t) \right) \qquad |\phi_\alpha(t)\rangle = \underline{\underline{e}}^{-i\omega t} |\alpha\rangle$$

$$= i E_0 \sin kx \left(\phi_\alpha(t), (b^+ - b) \phi_\alpha(t) \right)$$

$$= i E_0 \sin kx \left(e^{i\omega t} \alpha^* - e^{-i\omega t} \alpha \right) \underset{1}{\underset{\parallel}{\langle \alpha | \alpha \rangle}}$$

$$= 2 E_0 |\alpha| \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi) \qquad \alpha = \underline{\underline{|\alpha|}} e^{-i\varphi}$$

Das ist eine stehende Welle im Resonator. Das E-Feld eines kohärenten Zustand hat also einen endlichen Erwartungswert und hat ein Verhalten ähnlich der klassischen ED.

Analog: $\quad \langle \underline{n} \rangle = \left(\phi_\alpha, b^+ b \, \phi_\alpha \right)$

$$= \alpha^* \alpha = |\alpha|^2$$

Intensität $\quad |E|^2 \sim |\alpha|^2 \sim \langle n \rangle$

ist proportional zur Photonenzahl

(klassisch erwartetes Ergebnis)

<u>Aber</u>, auch der kohärente Zustand unterliegt dem Quantenrauschen, d.h.

$$\langle \Delta n^2 \rangle \neq 0 \quad = |\alpha|^2 = \langle n \rangle$$

$$\langle \Delta E^2 \rangle \neq 0$$

III Thermischer Zustand

Thermisches Licht läßt sich nicht gut über einen reinen Zustand definieren. Der Erwartungswert wird über den statistischen Operator definiert:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \qquad \text{mit } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$= \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar\omega b^+ b}$$

Zustandssumme: $Z = Sp\left[e^{-\beta\hbar\omega b^+ b} \right]$

$$= \sum_n \langle \phi_n | e^{-\beta\hbar\omega \underline{b^+ b}} | \phi_n \rangle$$

$A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$

$f(A)|\alpha\rangle = f(a)|\alpha\rangle$

$$= \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad \text{geometrische Summe}$$

Mittlere Photonenzahl

$$\langle \underline{n} \rangle = Sp[b^+ b \rho] = \sum_n \langle \phi_n | b^+ b e^{-\beta\hbar\omega b^+ b} | \phi_n \rangle$$

$\underline{n} = b^+ b$

$$= \sum_n \frac{n e^{-\beta\hbar\omega n}}{Z}$$

$$= \frac{1}{Z} \partial_{-\beta\hbar\omega} Z = \partial_{\beta\hbar\omega} \ln Z$$

$$= \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)(-1) \frac{- e^{-\beta\hbar\omega}}{\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)^2}$$

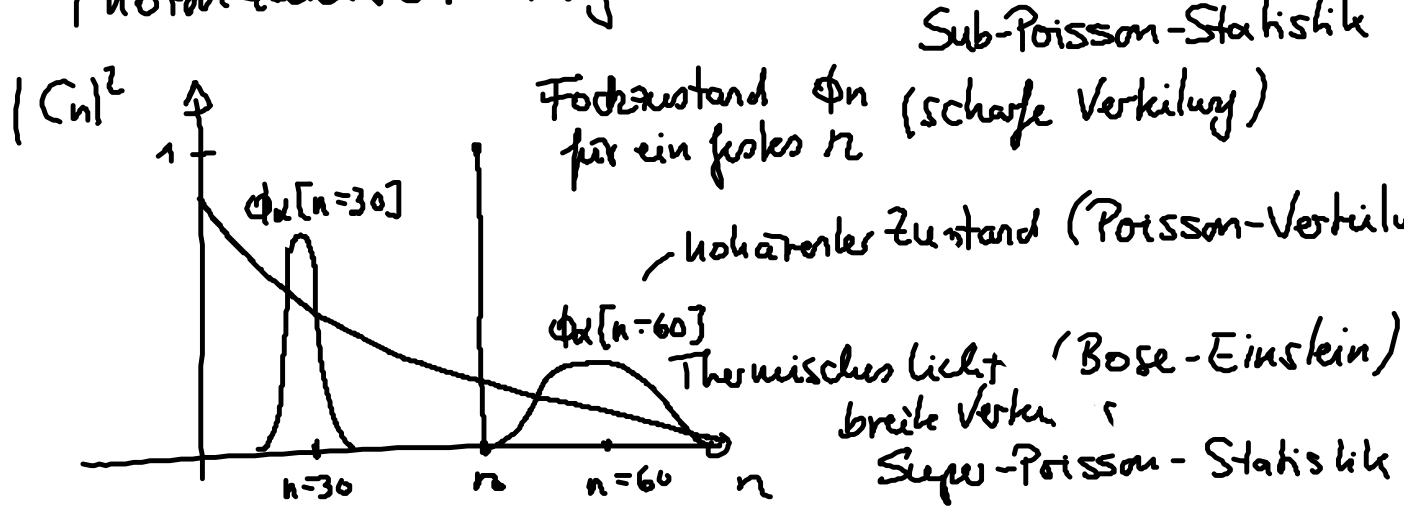
$$= \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \bar{n}$$ Bose-Einstein Verteilung

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \bar{n} + 2\bar{n}^2$$

- Thermisches Licht folgt der Bose-Einstein-Statistik.
- Beim Fockzustand ist die Photonzahl scharf definiert.
- Kohärentes Licht: $|C_n|^2 = \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$

  das entspricht der Poisson-Verteilung wobei $\langle n \rangle = |\alpha|^2 \triangleq$ Breite der Verteilung

Photonzahlverteilung:



Poisson-Verteilung liefert Aussagen über die Photonzahl n (seltene, zufällige, unkorrelierte Ereignisse), wenn der Mittelwert $\langle n \rangle = |\alpha|^2$ bekannt ist.

Für große n geht die Poisson-Verteilung in die Gaußverteilung über.

- Glauber Zustand: Photonen treten zufällig auf

  Poisson-Verteilung

  z.B. Laser

- Fockzustand: Photonen treten vereinzelt auf (antibunching)

  Sub-Poisson-Statistik

  z.B. Einzelphotonemitter

- Thermische Licht: Photon treten "geklumpt" auf (bunching)

  Super-Poisson-Statistik

  z.B. Lampe

Viel Erfolg bei der Klausur!

VL zu Carbon nanotubes und Graphen

SS 2010