1.6 Der harmon. Oszillator u. Leiteroperatoren

Anwendungsbeispiel der abstrakten Darstell. im Hilbertraum

1-dim. harmon. Osz. (Notation im Folg.: $x, p, \dots$ statt $\hat{x}, \hat{p}, \dots$)

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2}$$ Hamiltonop.

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i}$$ Vertauschungs-Rel.

Def. eines Operator („Leiterop.“) :

$$b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x$$ nicht hermitesch!

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x$$

$$\Rightarrow bb^+ = \frac{1}{2m\hbar\omega}p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{(px - xp)}_{[p,x]=\frac{\hbar}{i}}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}H + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$b^+b = \frac{1}{2m\hbar\omega}p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{i}{2\hbar}\underbrace{(px - xp)}_{\frac{\hbar}{i}}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$\overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} \boxed{[b, b^+] = 1}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{H = \hbar\omega\left(b^+b + \frac{1}{2}\right)}$$

Weitere Vertauschungsrel.:

$$(bb^+)b \overset{(1)}{=} \frac{1}{\hbar\omega}Hb + \frac{1}{2}b$$

$$= b(b^+b) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\hbar\omega}bH - \frac{1}{2}b$$

$$\Big\} \quad [b, H] = bH - Hb = \hbar\omega\, b$$

adjungiert: $(bH)^+ - (Hb)^+ = -[b^+, H] = \hbar\omega b^+$

$$[b, (b^+)^n] = n(b^+)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial b^+}(b^+)^n$$

Beweis durch vollst. Induktion:

$n=1: \quad [b, b^+] = 1$ ✓

Sei für $n \geq 1$ Behaupt. bewiesen. Dann ist

$$[b, (b^+)^{n+1}] = b(b^+)^{n+1} - (b^+)^{n+1} b$$

$$= \underbrace{b(b^+)^n b^+ - (b^+)^n b b^+}_{} \underbrace{+ (b^+)^n b b^+ - (b^+)^n b^+ b}_{}$$

$$= \underbrace{[b, (b^+)^n]}_{n(b^+)^{n-1}} b^+ + (b^+)^n \underbrace{[b, b^+]}_{1}$$

$$= (n+1)(b^+)^n \qquad \square$$

adjungiert: $[b^+, b^n] = -n b^{n-1} = -\frac{\partial}{\partial b} b^n$

Für bel., in Potenzreihe entwickelbare Fkt. f:

$$\boxed{\begin{aligned} [b, f(b^+)] &= \frac{\partial}{\partial b^+} f(b^+) \\ [b^+, f(b)] &= -\frac{\partial}{\partial b} f(b) \end{aligned}}$$

Eigenwerte von H

Sei $|E\rangle$ ein normierter Eigenzustand von H mit dem Eigenwert E, $|E\rangle \neq 0$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$\rightarrow \hbar\omega \underbrace{\langle E|b^+}_{\langle\psi|} \underbrace{b|E\rangle}_{|\psi\rangle} = \langle E|(H - \tfrac{\hbar\omega}{2})|E\rangle = E - \tfrac{\hbar\omega}{2}$$

$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{E \geq \frac{\hbar\omega}{2}} \quad \text{Energiespektrum nach unten beschränkt}$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \iff b|E\rangle = \theta$$

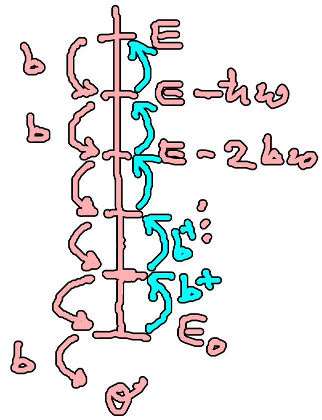
<u>Beh.</u>: $b|E\rangle$ ist Eigenzustand zu H mit EW $E-\hbar\omega$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \Longrightarrow H\, b|E\rangle = (E-\hbar\omega)\, b|E\rangle$$

Beweis:

$$Hb|E\rangle = (bH - \underbrace{[b,H]}_{\hbar\omega b})|E\rangle = b(H-\hbar\omega)|E\rangle = b(E-\hbar\omega)|E\rangle$$
$$= (E-\hbar\omega)\, b|E\rangle \quad \square$$

Durch Wiederholung könnte man Eigenzust. $|E\rangle \neq \theta$ mit bel. tiefer Energie erzeugen, wenn nicht $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ gelten müsste.



Daher ex. $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$b^m|E\rangle = \theta, \quad \text{aber } b^{m-1}|E\rangle \neq \theta$$

Def. <u>Grundzustand</u> $|0\rangle := b^{m-1}|E\rangle$

nicht Null-ket θ
sondern Quantenzahl $n=0$

$$H|0\rangle = \hbar\omega(b^+b + \tfrac{1}{2})|0\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$$

$b|0\rangle = b^m|E\rangle = \theta$

Also $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$ $\boxed{b|0\rangle = \theta}$

Weiter:

$$Hb^+|0\rangle = (b^+H \underbrace{+ \hbar\omega b^+}_{[b^+,H] = -\hbar\omega b^+})|0\rangle = b^+\underbrace{(H+\hbar\omega)}_{\frac{\hbar\omega}{2}+\hbar\omega}|0\rangle$$
$$= \tfrac{3}{2}\hbar\omega\, b^+|0\rangle$$

d.h. $b^+|0\rangle$ ist Eigenzust. zum Eigenwert $\frac{3}{2}\hbar\omega$

Vollständige Ind.: Sei $H(b^+)^n|0\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})(b^+)^n|0\rangle$

Dann $H(b^+)^{n+1}|0\rangle \overset{!}{=} \hbar\omega(n+1+\frac{1}{2})(b^+)^{n+1}|0\rangle$
zeigen

$\square$

<u>Normierung</u> der Eigenzustände $(b^+)^n|0\rangle$:

Der Grundzustand sei normiert: $\langle 0|0\rangle = 1$

n-ter angeregter Zustand:

$|n\rangle = \alpha_n (b^+)^n|0\rangle$ mit Normierungsfaktor α_n

$$1 \overset{!}{=} \langle n|n\rangle = |\alpha_n|^2 \langle 0|b^n(b^+)^n|0\rangle$$

$$\langle 0|b^n(b^+)^n|0\rangle = \langle 0|b^{n-1}\Big((b^+)^n b + \underbrace{[b,(b^+)^n]}_{n(b^+)^{n-1}}\Big)|0\rangle$$

$$= \langle 0|b^{n-1}(b^+)^n \underbrace{b|0\rangle}_{=0} + n\langle 0|b^{n-1}(b^+)^{n-1}|0\rangle$$

$$\overset{n\text{-mal}}{=} \dots$$

$$= n(n-1)\dots\cdot 2\cdot 1 \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} = n!$$

also (bis auf willkürlichen Phasenfaktor:

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n|0\rangle}$$ normierte Eigenzustände

zu den Energieeigenwerten $\boxed{E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

<u>Quanten-Sprechweise</u>:

$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ „<u>Schwingungsquant</u>"

$|n\rangle$ Zustand mit n Schwingungsquanten (<u>Phononen</u>) der Frequenz ω

b Vernichtungsop.
b^+ Erzeugungsop. } für Schwingungsquanten

$$b|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, b(b^+)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left\{(b^+)^n b + [b,(b^+)^n]\right\}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\, \underbrace{n(b^+)^{n-1}|0\rangle}_{\sqrt{(n-1)!}\,|n-1\rangle} = \frac{n}{\sqrt{n}}|n-1\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$b^+|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^{n-1}|0\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$N := b^+b$ „Teilchenzahl"op. der Schwingungsquanten:

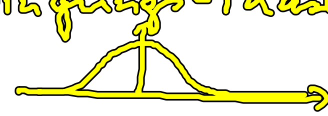
$$N|n\rangle = \underbrace{b^+\underbrace{b|n\rangle}_{\sqrt{n}\,|n-1\rangle}}_{\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle} = n|n\rangle$$

in Übereinstimmung mit

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(N+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle$$

<u>Unterschiede zur klass. Schwingung</u>:

- diskrete Energien $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$
- Nullpunktsenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$
- Unschärfe-Bez.: x und p nicht zugleich scharf
  $$\Delta x\, \Delta p = \hbar\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$
- Energie scharf $\Longrightarrow$ Schwingungs-Phase unbestimmt



x Aufenthaltswahrscheinl.

- Phase scharf (kohärenter Zustand)

$\Rightarrow$ kein Energieeigenzustand
(nicht stationär, schwing. Gauß-Wellen-paket)
Überlagerung vieler Energien
„glauberzustände")

- Aufenthaltswahrsch. $\neq 0$ in klass. verbotenen Bereich (Tunneleffekt)

- große Energie (n groß) $\longrightarrow$ klass. Korrespondenz-prinzip
  $E \gg \hbar\omega = 25\,meV$
  $\hat{=}\ 10^{-27}\,kWh$